



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Configuraciones centrales en problemas de N cuerpos

Autor/es

FRANCISCO MUÑOZ RODRIGO

Director/es

VÍCTOR LANCHARES BARRASA

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2017-18



Configuraciones centrales en problemas de N cuerpos, de FRANCISCO MUÑOZ RODRIGO

(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

Configuraciones centrales en problemas de N cuerpos

Autor: Francisco Muñoz Rodrigo

Tutor: Víctor Lanchares Barrasa

Curso académico: 2017/2018

Facultad de Ciencia y Tecnología

Grado en Matemáticas

Universidad de La Rioja

Resumen

En esta memoria vamos a tratar sobre uno de los problemas clásicos de la Mecánica Celeste, como son las configuraciones centrales. Éstas son unas soluciones particulares del problema de n cuerpos en la que todos ellos mantienen su configuración inicial, salvo rotaciones y homotecias. Determinar la finitud de las mismas constituye uno de los problemas del siglo XXI. No obstante, nuestra pretensión es abordar los teoremas más clásicos, partiendo de las demostraciones de Euler y Lagrange para el caso de 3 cuerpos.

A continuación nos centraremos en determinar el número de configuraciones centrales, cuando todos los cuerpos se encuentran sobre una recta. Para ello seguiremos las ideas de Moulton que, partiendo del caso conocido de tres cuerpos, usa un argumento inductivo para contar el número de este tipo de configuraciones para n arbitrario.

Por último, para cerrar la memoria, introduciremos el concepto medias ponderadas, que nos ayudaran a tener una nueva visión complementaria de este problema.

Summary

This report deals with one of the classical problems of Celestial Mechanis, as it is the so called central configurations. They are special solutions of the n -body problem where all the masses maintain the initial configuration except by dilations and rotations. Determine the finiteness of the number of such solutions is one of the 21st century problems. Nevertheless, our aim is to present the classical theorems, starting by the proofs given by Euler and Lagrange for the three body problem.

After that, we will focus on the number of central configurations, when all the bodies lay on the same line. To do this, we will follow Moulton's ideas who, from the known solution for three bodies, uses an inductive argument to count the total number of this type of configurations for a given n .

Finally, to end this report, we introduce the concept of weighted means, to give a complementary approach to this problem.

Índice

1	Nociones básicas	1
1.1	Introducción	1
1.2	Ejemplos de configuraciones centrales	2
1.2.1	Partículas en colisión y en expansión	3
1.2.2	Caso intermedio entre colisión y expansión	3
1.2.3	Otras aplicaciones	4
1.2.4	Número de configuraciones centrales	6
2	El problema de tres cuerpos	11
2.1	Introducción	11
2.2	Soluciones en órbitas circulares	12
2.2.1	Soluciones triangulares	14
2.2.2	Soluciones colineales	15
2.2.3	Propiedades dinámicas de las soluciones	17
2.3	Soluciones cónicas generales	18
3	Soluciones colineales para N cuerpos	25
3.1	Planteamiento del problema	25
3.2	Número de configuraciones colineales	29
4	Medias ponderadas	39
4.1	Medias ponderadas	39
4.2	Soluciones triangulares	43
4.3	Configuraciones centrales colineales	43
	Referencias	49

Capítulo 1

Nociones básicas

1.1 Introducción

El problema de los N cuerpos es uno de los problemas clásicos de la Mecánica Celeste que trasciende mucho más allá de su contexto planetario. La idea principal radica en encontrar las trayectorias de varios cuerpos que se mueven sujetos bajo las fuerzas de atracción que se ejercen entre sí. El problema más sencillo de N cuerpos se obtiene cuando $N = 2$ y fue resuelto por Newton. En este caso, dada cualquier condición inicial se puede determinar la posición y la velocidad de cada uno de los cuerpos en cualquier instante de tiempo de manera analítica. Así, las trayectorias que describen los cuerpos son secciones cónicas que, en el caso de que sean elipses, siguen las leyes de Kepler. Pero, para $N \geq 3$, no es posible encontrar soluciones analíticas, habiéndose demostrado que el problema presenta comportamientos caóticos. En este sentido, todos los esfuerzos han ido encaminados a encontrar soluciones particulares del problema de N cuerpos y, entre ellas, destacan las llamadas *soluciones homográficas*. En estas soluciones los cuerpos mantienen la misma configuración inicial durante todo el tiempo, salvo homotecias y rotaciones. Es decir, son siempre similares a la configuración inicial. Estas soluciones son también *configuraciones centrales*, que son aquellas soluciones del problema de N cuerpos en las que la fuerza gravitatoria es proporcional a la masa y al vector de posición. Estas soluciones no solo son importantes por ser soluciones particulares del problema de N cuerpos, sino porque juegan un papel importante en la comprensión de la dinámica del problema y también porque no son soluciones exóticas, sino que aparecen en numerosos problemas reales, además de tener aplicaciones prácticas.

En el caso de tres cuerpos, es decir $N = 3$, Euler y Lagrange encontraron todas las posibles configuraciones centrales. Pero el problema se resiste para $N \geq 4$, habiendo numerosos resultados para $N = 4$, pero poco o nada se sabe cuando $N \geq 5$. Sin embargo, no cabe duda de que estudiar los casos en los que N es pequeño puede ayudar a entender sistemas generales de N cuerpos. Esta dificultad a la hora de encontrar estas soluciones particulares hace que el

problema que se va a estudiar sea considerado como uno de los problemas del siglo XXI [13].

Para poder definir lo que se entiende como una configuración central, empezaremos introduciendo las ecuaciones del movimiento de N objetos que se mueven bajo la acción de la fuerza newtoniana de la gravedad y referidas a un sistema de referencia inercial, donde el origen coincide con el centro de masas de los N cuerpos. Estas ecuaciones vienen dadas por

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{i,j}^3}, i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

siendo m_i y \vec{r}_i , respectivamente, la masa y el vector de posición para la partícula i -ésima;

$$r_{i,j} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

la distancia entre las partículas i y j ; G es la constante universal de gravitación y, por último, U , el potencial gravitatorio dado por

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{r_{i,j}}. \quad (1.2)$$

Encontrar soluciones del sistema de ecuaciones (1.1) es complicado, por lo que se buscan unas soluciones especiales, las configuraciones centrales, que cumplen

$$\ddot{\vec{r}}_i = \lambda(t) \vec{r}_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.3)$$

con λ un escalar igual para todos los cuerpos. Así, si combinamos (1.1) y (1.3), obtenemos

$$\lambda \vec{r}_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

con lo que conseguimos otra forma de expresar las ecuaciones que satisface una configuración central. Notar que solucionar (1.4) equivale a resolver un sistema no lineal de ecuaciones, lo que supone una notable simplificación al problema original que consistía en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Como ya hemos dicho, en el caso de que tengamos una configuración central, la dinámica de cada partícula sigue el dictado de una fuerza central y, a la postre, todas ellas se van a mover como si de un problema de dos cuerpos se tratara.

1.2 Ejemplos de configuraciones centrales

Acabamos de dar la definición de lo que se entiende por configuración central y, a pesar de que se trata de soluciones particulares del problema de N cuerpos, no por eso dejan de tener importancia, pues podemos encontrarlas en problemas que se presentan en la realidad, como en la dinámica de vórtices, en los primeros modelos para los anillos de Saturno, en la disposición de los asteroides troyanos y en aplicaciones a problemas de dinámica orbital para las misiones espaciales.

Veamos, entonces, algo más desarrollado, algunos ejemplos en los cuales las configuraciones centrales juegan un papel importante, como son en las colisiones y en las expansiones de un sistema de N cuerpos, donde podríamos pensar en su aplicación a la expansión del Universo.

1.2.1 Partículas en colisión y en expansión

Sea \vec{r}_i el vector de posición del cuerpo i -ésimo. Supongamos que

$$\vec{r}_i \sim \vec{A}_i t^\alpha \quad (1.5)$$

con \vec{A}_i constante y $\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso, estamos diciendo que los cuerpos se mueven, asintóticamente, siguiendo una dirección constante, algo que puede suponerse cuando están o muy próximos entre sí, cerca de una colisión, o muy alejados entre ellos, en un proceso de expansión, como el de las galaxias en el Universo. Determinemos entonces \vec{A}_i y α . Para ello derivamos la expresión (1.5), con lo que se obtiene

$$\ddot{\vec{r}}_i \sim (\alpha - 1)\alpha \vec{A}_i t^{\alpha-2}.$$

Si sustituimos en (1.1), obtenemos la siguiente expresión

$$(\alpha - 1)\alpha \vec{A}_i t^{\alpha-2} \sim \frac{1}{m_i} \sum_{j=1, j \neq i} \frac{G m_i m_j (\vec{A}_j - \vec{A}_i)}{|\vec{A}_j - \vec{A}_i|^3} t^{-2\alpha}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Igualando los exponentes en t se obtiene $\alpha = 2/3$ y puede verse que entonces se tiene una configuración central.

Lo que se ha probado es que las partículas en colisión forman una configuración central en el límite, cuando $t \rightarrow 0$. Sin embargo para que esto suceda es necesario justificar que las órbitas de colisión se pueden describir en términos dados por la ecuación (1.5) y que esta relación asintótica se puede derivar. Una prueba de ello se puede encontrar en [14].

1.2.2 Caso intermedio entre colisión y expansión

Cuando los N cuerpos no están cerca de una colisión o a gran distancia entre ellos alejándose unos de otros tenemos una situación en la que los cuerpos pueden considerarse moviéndose como un sólido rígido, es decir manteniendo las distancias entre ellos, viéndose afectados solo por una rotación, cuya velocidad angular podemos tomar constante, si nos ceñimos a instantes de tiempo corto. Usando notación compleja, podemos expresar la posición de cada partícula como

$$z_j(t) = a_j e^{\omega i t}, \quad (1.6)$$

donde ω , la velocidad angular, y a_j , la distancia al centro de masas, son constantes, como ya hemos indicado. Derivando dos veces (1.6) resulta

$$\ddot{z}_j(t) = -\omega^2 a_j e^{\omega i t}.$$

Sustituyendo en las ecuaciones del movimiento, se observa que las partículas rotan como un sólido rígido, formando una configuración central con $\lambda = -\omega^2$.

Los casos anteriores, que podríamos calificar como situaciones límite, no son las únicas en las que nos encontramos con configuraciones centrales. De hecho, en cualquier otra configuración límite o extrema, donde el movimiento está delicadamente determinado por las ecuaciones del movimiento, se espera que ocurra una configuración central. En otras palabras, tal como se ha descubierto a través de la investigación en este área, las configuraciones centrales desempeñan un papel crucial en el estudio de los sistemas de N cuerpos [12].

1.2.3 Otras aplicaciones

Existen otros escenarios donde encontrar configuraciones centrales. Un ejemplo clásico es el de los anillos de Saturno. De hecho, parece lógico pensar que los anillos de Saturno se comporten como un sólido rígido, con un número N de partículas dispuestas sobre una circunferencia. Bajo esta idea, de que los anillos están compuestos por masas individuales, Maxwell introdujo esta aproximación a mediados del siglo XIX. Pero este modelo está conectado con lo que ya se vio en la sección 1.2.2, por lo que se deberá exigir que las partículas en el anillo formen una configuración central. Por lo tanto, el primer paso es determinar si es posible encontrar configuraciones centrales situando N cuerpos sobre una circunferencia. Vamos a ver que esto es posible si las masas están sobre los vértices de un polígono regular y son todas ellas iguales.

Supongamos que estamos en el caso $N = 8$, como en la Figura 1.1, y veamos cuál es la fuerza resultante sobre una de las masas, por ejemplo m_1 . Por la simetría de la configuración basta ver la resultante de la fuerza ejercida por las masas m_2 y m_8 , ya que para el resto de pares de masas, m_3 , m_7 y m_4 , m_6 el resultado será similar. Por otra parte, la resultante de la fuerza ejercida por m_5 está dirigida hacia el centro de la circunferencia, que es donde estará situado el centro de masas. Ahora bien, la fuerza ejercida por m_2 y m_8 sobre m_1 puede descomponerse en dos direcciones, una en la dirección horizontal, hacia el centro de masas, y otra en dirección perpendicular sobre la línea discontinua que aparece en la Figura 1.1. Pero resulta evidente que las fuerzas en la dirección vertical son de igual módulo y de sentidos opuestos, por lo que la resultante total en esa dirección es nula. Así pues, la resultante de la fuerza ejercida por m_2 y m_8 sobre m_1 va dirigida hacia el centro de la circunferencia, es decir, se trata de una fuerza central. Como este argumento sirve para cualquiera de las otras partículas, llegamos a la conclusión de que

$$\ddot{\vec{r}}_j = \lambda \vec{r}_j,$$

obteniéndose una configuración central. Notar que, como la fuerza está dirigida hacia el centro de la circunferencia, $\lambda < 0$. Sin ninguna dificultad podemos extender esta argumentación al caso de N masas iguales situadas sobre los vértices de un polígono regular.

Examinemos ahora el problema, pero añadiendo una nueva masa en el centro del anillo. Necesitamos que la resultante total de la fuerza ejercida por el resto

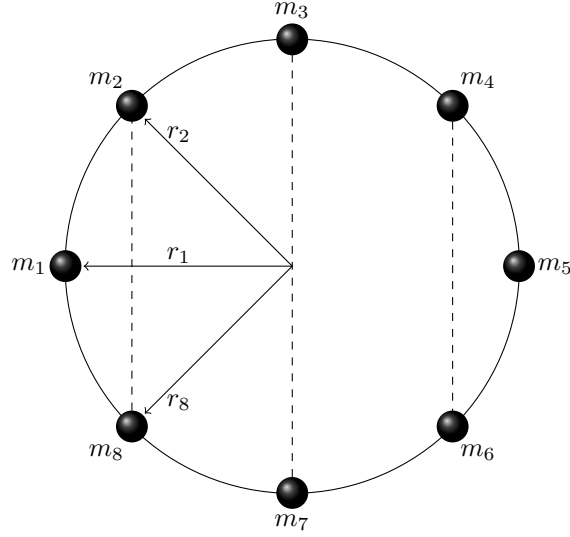


Figura 1.1: Configuración central de 8 masas sobre los vértices de un octógono regular.

de masas sobre una de ellas siga siendo central. Si la masa está situada sobre el anillo, a la resultante de las fuerzas que ejercían el resto de masas del anillo debe añadirse la fuerza ejercida por la masa central, pero ambas fuerzas son centrales, por lo que la fuerza total también. Así, para que la configuración sea central, necesitamos que la resultante de las fuerzas ejercidas por las masas del anillo sobre la masa central sea nula. En este sentido tenemos el siguiente teorema

Teorema 1 *La fuerza resultante de las masas del anillo sobre la masa central es igual a 0.*

Demostración 1 *Las masas del anillo están situadas sobre los vértices de un polígono regular de N lados. Las coordenadas de las masas las podemos identificar con las N raíces del polinomio $x^N - 1 = 0$, que son de la forma $\cos \frac{2k\pi}{N} + i \sin \frac{2k\pi}{N}$, $k = 0, \dots, N-1$. Si calculamos las componentes horizontal y vertical de la resultante de las fuerzas ejercidas por las N masas del anillo, tendremos que, salvo un factor constante,*

$$F_x = \sum_{k=1}^N \cos \frac{2k\pi}{N}, \quad F_y = \sum_{k=1}^N \sin \frac{2k\pi}{N}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} x^N - 1 &= \prod_{k=1}^N \left(x - \cos \frac{2k\pi}{N} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{N} \right) = \\ &= x^N - x^{N-1} \sum_{k=1}^N \cos \frac{2k\pi}{N} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{N} + \cdots, \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\sum_{k=1}^N \cos \frac{2k\pi}{N} = \sum_{k=1}^N \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{N} = 0.$$

Por lo tanto $F_x = F_y = 0$. ■

En consecuencia, N masas iguales dispuestas sobre los vértices de un polígono regular y un cuerpo central de masa arbitraria, forman una configuración central.

1.2.4 Número de configuraciones centrales

A la hora de encontrar configuraciones centrales se buscan otro tipo de caracterizaciones de las mismas, más allá de la definición dada por la ecuación (1.4). En este sentido, se considera la siguiente expresión, que no es otra cosa que el momento total de inercia del sistema,

$$R^2 = \sum_{j=1}^N m_j \vec{r}_j^2, \quad (1.7)$$

que puede verse como una medida de tamaño del sistema de N -cuerpos. A partir de (1.7), se define la *medida de la configuración*, RU , como el producto del radio R y el potencial U del sistema. La conexión que esta medida tiene con una configuración central se puede ver diferenciando, ya que

$$\nabla RU = R \left(\frac{U}{R^2} m_1 \vec{r}_1 + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}, \dots, \frac{U}{R^2} m_N \vec{r}_N + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_N} \right), \quad (1.8)$$

y de aquí, llegamos al siguiente resultado

Teorema 2 *Una configuración es central si y solo si $\nabla RU = 0$. Además, se tiene que $\lambda = -U/R^2$.*

Demostración 2 *Sea $\nabla RU = 0$ entonces*

$$R \left(\frac{U}{R^2} m_1 \vec{r}_1 + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1}, \dots, \frac{U}{R^2} m_N \vec{r}_N + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_N} \right) = 0.$$

Como $R \neq 0$, para cada j se tiene

$$\frac{U}{R^2} m_j \vec{r}_j + \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j} = 0 \Rightarrow \frac{U}{R^2} m_j \vec{r}_j = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j}.$$

Con lo que obtenemos

$$\frac{1}{m_j} \frac{dU}{d\vec{r}_j} = -\frac{U}{R^2} m_j \vec{r}_j.$$

que se corresponde con una configuración central (1.4) en la que $\lambda = -U/R^2$.

Por otra parte, si la configuración es central, para cada \vec{r}_j se tiene

$$\lambda \vec{r}_j = \frac{1}{m_j} \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j} \Rightarrow \lambda m_j \vec{r}_j^2 = \vec{r}_j \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_j}, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Sumando para $1 \leq j \leq N$ y aplicando el teorema de Euler para funciones homogéneas (U es homogénea de grado -1) resulta

$$\lambda R^2 = -U \Rightarrow \lambda = -\frac{U}{R^2}$$

y, también de manera trivial, $\nabla RU = 0$. ■

La medida de la configuración ayuda a determinar el total de configuraciones centrales para un determinado número de masas. Teniendo en cuenta que el centro de masas está fijo en el origen, es decir

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0, \quad (1.9)$$

y tomando $M = \sum_{i=1}^N m_i$, como la masa total del sistema, vemos que

$$R^2 = \frac{1}{M} \sum_{i \leq j} m_i m_j r_{i,j}^2, \quad (1.10)$$

ya que, desarrollando el sumatorio del segundo miembro,

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq j} m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2 &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_j m_i m_j [\vec{r}_i^2 + \vec{r}_j^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j] = \\ &MR^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \sum_j m_j \vec{r}_j \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta (1.9), se obtiene la relación dada por (1.10). Una consecuencia de esto es que la medida de la configuración depende solo de la distancia mutua entre partículas. En otras palabras, es invariante por rotaciones, ya que cualquier cambio de orientación de la configuración no afecta al valor de RU . Por tanto las configuraciones centrales son únicas salvo rotaciones y dilataciones. Debido a esto, podemos normalizar una configuración central haciendo $R^2 = 1$. Nótese que $R^2 = 1$ define un elipsoide que se denomina *elipsoide de masas*. No es difícil ver que encontrar una configuración central normalizada queda reducido

a un problema de optimización con multiplicadores de Lagrange, ya que es una solución del sistema

$$\nabla U - \lambda \nabla R = 0, \quad R = 1.$$

De esta forma tenemos el siguiente resultado

Teorema 3 *Las posiciones $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ definen una configuración central normalizada si y solo si son un punto crítico de la restricción del potencial U sobre elipsoide de inercia $R^2 = 1$.*

De aquí surge, casi de inmediato, la siguiente pregunta: dado un conjunto de N masas, ¿es posible garantizar la existencia de configuraciones centrales? La respuesta es afirmativa y, para verlo, introducimos el espacio en el que están definidas las configuraciones centrales. Inicialmente pensamos en \mathbb{R}^{3N} como dicho espacio. Sin embargo, el potencial U no está definido cada vez que $\vec{r}_i = \vec{r}_j$. En este sentido, sea $\mathbf{q} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$, y sea el conjunto Δ_{ij} dado por

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N} \mid \vec{r}_i = \vec{r}_j\}.$$

Entonces, el espacio donde están definidas las configuraciones centrales es

$$X = \mathbb{R}^{3N} \setminus \Delta, \quad (1.11)$$

siendo Δ el conjunto de las colisiones definido como $\Delta = \bigcup \Delta_{ij}$. Además, para el elipsoide de masas introducimos la notación

$$S = \{\mathbf{q} \in X \mid R^2 = 1\}. \quad (1.12)$$

Ahora podemos enunciar el siguiente resultado que nos conduce directamente a la existencia de configuraciones centrales, para cualquier colección de N masas.

Teorema 4 *La restricción del potencial U sobre el conjunto S alcanza un valor mínimo para algún valor $\mathbf{q}_0 \in S$.*

Demostración 4 *Consideremos la restricción $U|_S : S \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, se tiene $U|_S \rightarrow \infty$ cuando $\mathbf{q} \rightarrow \Delta$.*

Sea $\mathbf{q} \in X \cap S$ y $K = 2U(\mathbf{q})$. Sea V_k un entorno de Δ tal que

$$U(\mathbf{q}) > k, \quad \forall \mathbf{q} \in V_k.$$

Es evidente que $S \setminus V_k$ es un compacto y entonces $U|_{S \setminus V_k}$ alcanza un valor mínimo en un punto $\mathbf{q}_0 \in S \setminus V_k$. Puesto que $U|_{V_k} > K$ y $U_{\min} \leq K/2$, resulta que \mathbf{q}_0 es también un mínimo de $U|_S$. ■

Como corolario, por el Teorema 3, \mathbf{q}_0 da lugar a una configuración central normalizada. Es decir, para un conjunto cualquiera de N masas existe, al menos, una configuración central. Sin embargo, no es sencillo saber cuál es el número de configuraciones centrales. De hecho, uno de los problemas abiertos para configuraciones centrales planas se debe a Wintner [14] y Smale [13] y hace referencia

a la finitud de configuraciones centrales planas para cualquier colección de N masas positivas.

Recientemente, en 2006, Hampton y Moeckel [6] probaron la finitud de configuraciones centrales planas para $N = 4$ y, en 2012, Albouy y Kaloshin [1] para $N = 5$. Nada se sabe para $N > 5$ y la conjetura representa uno de tantos retos matemáticos por resolver. La creencia es que el número de configuraciones centrales planas es finito, pero esto no es así si el problema es más general y se permiten valores negativos de las masas o que éstas tengan una carga eléctrica. En este sentido, G. Roberts [11] probó, en 1999, que existe una familia uniparamétrica de configuraciones centrales planas no equivalentes para un problema de 5 cuerpos, cuando una de las masas es negativa. Por otra parte, Alfaro y Pérez-Chavala [2], en 2002, demostraron la existencia de infinitas configuraciones centrales planas para un problema de 4 cuerpos para con masas finitas, pero con carga eléctrica.

Como vemos, un problema, de planteamiento relativamente sencillo y de interés dentro del campo de la Mecánica Celeste, presenta no pocas dificultades a la hora de enfrentarse con él. Nosotros, nos centraremos en algunos resultados clásicos concernientes al número de configuraciones centrales. En concreto, abordaremos el caso en el que $N = 3$, resuelto ya por Euler y Lagrange y nos centraremos también en contar el número de soluciones en las que los N cuerpos permanecen alineados todo el tiempo.

Capítulo 2

Configuraciones centrales para el problema de tres cuerpos

2.1 Introducción

Es bien conocido que el problema de tres cuerpos no puede resolverse por medio de cuadraturas integrales, habiéndose demostrado que, incluso en algunos casos, su solución presenta un comportamiento caótico. Sin embargo, hay soluciones especiales que pueden obtenerse de manera analítica y, entre ellas están las configuraciones centrales. Como ya hemos dicho, éstas van a ser soluciones en las que se mantiene la misma posición relativa de los cuerpos, salvo un cambio de escala o una rotación. La primera de estas soluciones se debe a Lagrange y la podemos encontrar dentro de su memoria, *Essai sur le Problème des Trois Corps*, presentada a la Academia de París en 1772 (*Coll. Works, vol. VI, p. 229, Tisserand's Méc. Céleste, vol. I. chap. VIII.*). Se trata de las soluciones triangulares, que luego completaría con las soluciones colineales, descritas previamente por Euler [5].

Lo que llegó a probar Lagrange es que es posible encontrar condiciones iniciales adecuadas para tres cuerpos cualesquiera de manera que sus órbitas sean elipses semejantes, recorridas las tres en tiempos iguales. Como consecuencia de esto, la razón entre sus distancias mutuas se mantiene constante a lo largo del tiempo. Para verlo, empezaremos considerando el caso particular de que las órbitas de los cuerpos sean circulares, para luego generalizar el problema al caso de que describan cualquier sección cónica.

2.2 Soluciones en órbitas circulares

Consideremos el caso en el que buscamos una configuración central en la que los tres cuerpos describen una órbita circular. Asumiremos que los tres cuerpos están sobre un mismo plano y que el centro de masas se encuentra en el origen. Si las coordenadas sobre dicho plano las denotamos por ξ y η , entonces las ecuaciones del movimiento de los tres cuerpos vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{dU}{d\xi_i}, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{dU}{d\eta_i}, & i = 1, 2, 3, \\ U &= \frac{k^2 m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{k^2 m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{k^2 m_3 m_1}{r_{31}}, \\ r_{jk} &= \sqrt{(\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde k^2 es una constante positiva que depende de la constante de gravitación y de las masas de los cuerpos. Sea $n = 2\pi/P$ el movimiento medio de cada uno de los tres cuerpos en su órbita circular, siendo P el periodo de revolución. De este modo, podemos introducir unas nuevas coordenadas (x, y) , referidas a un sistema de referencia rotante con velocidad angular constante n ,

$$\begin{aligned} \xi_i &= x_i \cos nt - y_i \sin nt, & i = 1, 2, 3, \\ \eta_i &= x_i \sin nt + y_i \cos nt, & i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

de manera que las nuevas coordenadas son constantes para los tres cuerpos en este nuevo sistema de referencia. Derivando dos veces las ecuaciones (2.2) y sustituyendo en (2.1) se llega al sistema

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_i}{dt^2} - 2n \frac{dy_i}{dt} - n^2 x_i - \frac{1}{m_i} \frac{dU}{d\xi_i} &= 0, & i = 1, 2, 3, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} + 2n \frac{dx_i}{dt} - n^2 y_i - \frac{1}{m_i} \frac{dU}{d\eta_i} &= 0, & i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notemos que, como las coordenadas en el sistema de referencia rotante son constantes, las derivadas primera y segunda de las coordenadas son 0. Así, el sistema de ecuaciones (2.3) es en realidad un sistema de ecuaciones algebraicas,

que podemos escribir como

$$\begin{aligned}
-n^2 x_1 + \frac{k^2 m_2 (x_1 - x_2)}{r_{12}^3} + \frac{k^2 m_3 (x_1 - x_3)}{r_{13}^3} &= 0, \\
-n^2 x_2 + \frac{k^2 m_1 (x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{k^2 m_3 (x_2 - x_3)}{r_{23}^3} &= 0, \\
-n^2 x_3 + \frac{k^2 m_1 (x_3 - x_1)}{r_{13}^3} + \frac{k^2 m_2 (x_3 - x_2)}{r_{23}^3} &= 0, \\
-n^2 y_1 + \frac{k^2 m_2 (y_1 - y_2)}{r_{12}^3} + \frac{k^2 m_3 (y_1 - y_3)}{r_{13}^3} &= 0, \\
-n^2 y_2 + \frac{k^2 m_1 (y_2 - y_1)}{r_{12}^3} + \frac{k^2 m_3 (y_2 - y_3)}{r_{23}^3} &= 0, \\
-n^2 y_3 + \frac{k^2 m_1 (y_3 - y_1)}{r_{13}^3} + \frac{k^2 m_2 (y_3 - y_2)}{r_{23}^3} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Es importante señalar que si se verifican las ecuaciones (2.4), entonces las posiciones de los tres cuerpos se mantienen constantes en el sistema de referencia rotante.

A las ecuaciones (2.4) debemos añadir otras dos ecuaciones que provienen de haber considerado el centro de masas en el origen. Esto es, tenemos

$$\begin{aligned}
m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 &= 0, \\
m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) no son independientes. De hecho, si multiplicamos la primera ecuación de (2.4) por m_1 , la segunda por m_2 , la tercera por m_3 y las sumamos resulta

$$-n^2 (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) = 0,$$

que es la primera de las ecuaciones del centro de masas (2.5). Análogamente, multiplicando la cuarta, quinta y sexta ecuación por m_1 , m_2 y m_3 respectivamente y sumando, se obtiene la segunda ecuación del centro de masas (2.5). Con estas consideraciones, vemos que podemos reemplazar dos ecuaciones del sistema (2.4) por las ecuaciones del centro de masas, llegando a un sistema algo

más sencillo

$$\begin{aligned}
m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0, \\
-n^2x_1 + \frac{k^2m_2(x_1 - x_2)}{r_{12}^3} + \frac{k^2m_3(x_1 - x_3)}{r_{13}^3} &= 0, \\
-n^2x_2 + \frac{k^2m_1(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{k^2m_3(x_2 - x_3)}{r_{23}^3} &= 0, \\
m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0, \\
-n^2y_1 + \frac{k^2m_2(y_1 - y_2)}{r_{12}^3} + \frac{k^2m_3(y_1 - y_3)}{r_{13}^3} &= 0, \\
-n^2y_2 + \frac{k^2m_1(y_2 - y_1)}{r_{12}^3} + \frac{k^2m_3(y_2 - y_3)}{r_{23}^3} &= 0.
\end{aligned}$$

En este punto elegimos las unidades de longitud, masa y tiempo de manera conveniente. Notemos que ello no conlleva pérdida de generalidad y nos ayudará a simplificar notablemente el sistema. En este sentido, elegimos $r_{12} = 1$ y $k^2 = 1$. Entonces, las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones con órbitas circulares quedan

$$\begin{aligned}
m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0, \\
-n^2x_1 + m_2(x_1 - x_2) + \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{13}^3} &= 0, \\
-n^2x_2 + m_1(x_2 - x_1) + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{23}^3} &= 0, \\
m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0, \\
-n^2y_1 + m_2(y_1 - y_2) + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{13}^3} &= 0, \\
-n^2y_2 + m_1(y_2 - y_1) + \frac{m_3(y_2 - y_3)}{r_{23}^3} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.1 Soluciones triangulares

Es evidente que para cada conjunto de soluciones del sistema (2.6) existe una solución del problema considerado, es decir, tres masas moviéndose con movimiento circular uniforme. Consideremos $r_{ij} = 1$, cuando la distancia mutua entre los 3 cuerpos es siempre la misma, y veamos que existen soluciones. En efecto, en este caso (2.6) se reduce a un sistema lineal homogéneo con soluciones no triviales si la matriz de coeficientes no tiene rango máximo. En otro caso, la solución sería la trivial y, entonces, $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$, lo que nos dice que los 3 cuerpos ocuparían la misma posición (colisión).

El sistema que nos queda, con las consideraciones de $r_{ij} = 1$, es el siguiente

$$\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0, \\ (m_2 + m_3 - n^2)x_1 - m_2x_2 - m_3x_3 &= 0, \\ (m_1 + m_3 - n^2)x_2 - m_1x_1 - m_3x_3 &= 0, \\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0, \\ (m_2 + m_3 - n^2)y_1 - m_2y_2 - m_3y_3 &= 0, \\ (m_1 + m_3 - n^2)y_2 - m_1y_1 - m_3y_3 &= 0. \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes del sistema, A , viene dada por

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 + m_3 - n^2 & -m_2 & -m_3 & 0 & 0 & 0 \\ -m_1 & m_1 + m_3 - n^2 & -m_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & m_2 & m_3 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_3 - n^2 & -m_2 & -m_3 \\ 0 & 0 & 0 & -m_1 & m_1 + m_3 - n^2 & -m_3 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es

$$|A| = m_3^2(m_1 + m_2 + m_3 - n^2)^4.$$

Igualando a 0, y teniendo en cuenta que $m_3 \neq 0$, entonces

$$(m_1 + m_2 + m_3 - n^2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 = n^2.$$

Así pues, las tres primeras ecuaciones de (2.6) son iguales y con las tres últimas sucede lo mismo. Es decir, para x_1, x_2 e y_1, y_2 arbitrarios, podemos encontrar soluciones de manera que los 3 cuerpos están sobre los vértices de un triángulo equilátero.

2.2.2 Soluciones colineales

Visto que existen soluciones triangulares, buscamos ahora otro tipo de soluciones. Estas van a ser las soluciones colineales, es decir, con los 3 cuerpos situados sobre una recta. En este caso, podemos suponer que $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ con lo que las tres últimas ecuaciones de (2.6) se anulan, estando los tres cuerpos sobre el eje x . Además, supondremos que las masas están ordenadas de tal forma que $x_3 > x_2 > x_1$, más la suposición anterior de que $r_{12} = x_2 - x_1 = 1$. Por tanto, las ecuaciones (2.6) se reducen a

$$\begin{aligned} m_1x_1 + m_2(1 + x_1) + m_3x_3 &= 0, \\ m_2 + \frac{m_3}{(x_3 - x_1)^2} + n^2x_1 &= 0, \\ -m_1 + \frac{m_3}{(x_3 - x_1 - 1)^2} + n^2(1 + x_1) &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Despejando x_3 de la primera ecuación

$$x_3 = -\frac{m_1x_1 + m_2x_1 + m_2}{m_3},$$

podemos sustituir, ahora, x_3 en la segunda ecuación y despejar n^2 . De este modo resulta

$$n^2 = -\frac{m_3^3}{x_1(m_1x_1 + m_2x_1 + m_2 + m_3x_1)^2} - \frac{m_2}{x_1}.$$

Llevando los valores de x_3 y n^2 a la tercera ecuación y siendo la masa total del sistema $M = m_1 + m_2 + m_3$, se tiene que

$$m_2 + (m_1 + m_2)x_1 + \frac{m_3^3(1 + x_1)}{(Mx_1 + m_2)^2} - \frac{m_3^3x_1}{(Mx_1 + m_2 + m_3)^2} = 0. \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) se puede reducir a una ecuación polinómica de grado 5 en la variable x_1 . Sin embargo, no es fácil saber cuántas raíces reales van a existir para esta ecuación, con el añadido que, en nuestro caso, $x_1 < 0$, pues de otro modo el centro de masas no podría estar situado en el origen. De (2.8) es fácil ver que existe $x_1 < 0$ solución pues

$$\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} f(x_1) = -\infty, \quad f(0) > 0.$$

Por lo tanto, existe al menos existe una solución real negativa.

Podemos encontrar el total de soluciones del sistema (2.8) introduciendo una nueva variable $A = x_3 - x_2$. Notemos que $A > 0$, por la suposición que hemos hecho sobre la ordenación de las masas. Ahora, podemos obtener x_1 en función de A a partir de las ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0, \\ x_2 - x_1 &= 1, \\ x_3 - x_2 &= A. \end{aligned}$$

De aquí se obtiene

$$x_1 = -\frac{m_2 + m_3 + m_3A}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Y sustituyendo en (2.8), resulta

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)A^5 + (3m_1 + 2m_2)A^4 + (3m_1 + m_2)A^3 - (m_2 + 3m_3)A^2 \\ - (2m_2 + 3m_3)A - (m_2 + m_3) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Se trata, de nuevo, de una ecuación de grado 5. Sin embargo ahora, por la regla de los signos de Descartes¹, concluimos que solo existe una raíz real positiva de (2.9). Esto es porque solo hay un cambio de signo en la secuencia de coeficientes y, puesto que $A > 0$, solo existe una solución del sistema (2.8). Sin embargo, es evidente que podemos obtener otras dos soluciones si permutamos el orden las masas, con lo que se obtienen tres soluciones colineales.

¹El número de raíces reales positivas de un polinomio $f(x) = 0$ es igual al número de cambios de signo de término a término de $f(x)$ o es menor que este en un número par. El número de raíces negativas es igual al número de variaciones de $f(-x)$ o es menor que este en un número par.

2.2.3 Propiedades dinámicas de las soluciones

Las soluciones que acabamos de obtener, tanto las triangulares como las colineales, se denominan habitualmente *equilibrios relativos*, ya que los tres cuerpos giran rígidamente con la misma velocidad angular, manteniéndose constante la distancia relativa entre ellos. En el contexto del denominado problema restringido circular de tres cuerpos, estas soluciones están asociadas a los que se conocen como puntos lagrangianos, que se denominan L_1 , L_2 , L_3 , para las soluciones colineales y L_4 y L_5 para las triangulares. Estos puntos son de gran interés en el diseño de misiones espaciales, pues su condición de equilibrio relativo los convierte en lugares privilegiados para “estacionar” determinadas misiones de observación. Este es el caso del observador solar SOHO, que orbita en torno al punto lagrangiano L_1 del sistema de tres cuerpos restringido formado por el Sol, la Tierra y la propia sonda. Además, dentro del sistema solar, encontramos ejemplos de objetos asociados a las soluciones triangulares, como son los asteroides griegos y troyanos que orbitan alrededor del sol en la misma trayectoria en que lo hace Júpiter, precediéndolo o siguiéndolo a 60° de distancia.

Por otra parte, estas soluciones comparten ciertas propiedades con el problema de dos cuerpos. De hecho, puesto que los tres se mueven en órbitas circulares con velocidad angular uniforme alrededor del centro de masas, la ley de las áreas se cumple de manera independiente para cada uno de ellos. Por tanto, la fuerza resultante que actúa sobre cada una de los tres cuerpos está siempre dirigida en la dirección del centro de masas y se conserva el momento angular.

La conservación del momento angular es inmediata. Sean x_1 , x_2 y x_3 las distancias de las masas m_1 , m_2 y m_3 al centro de masas. Entonces, el vector de posición de cada una de ellas viene dado por

$$\vec{r}_j = x_j(\cos(t + \phi_j), \sin(t + \phi_j), 0), \quad j = 1, 2, 3,$$

siendo ϕ_j un ángulo constante, que queda fijado por la posición inicial de los tres cuerpos. A partir del vector de posición, obtenemos el vector velocidad

$$\vec{v}_j = x_j(-\sin(t + \phi_j), \cos(t + \phi_j), 0), \quad j = 1, 2, 3.$$

Así, el momento angular para cada una de las masas es igual a

$$m_j \vec{r}_j \times \vec{v}_j = m_j x_j(0, 0, 1), \quad j = 1, 2, 3,$$

lo que prueba la conservación del mismo, como ya habíamos señalado.

Por último, al ser el movimiento circular uniforme, la aceleración a la que está sometida la masa j -ésima es igual a

$$a_j = n^2 x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

por lo que la eceleración de cada uno de los cuerpos hacia el centro de masas es directamente proporcional a la distancia que los separa de éste.

2.3 Soluciones cónicas generales

El caso particular estudiado, con órbitas circulares, puede extenderse al caso general de manera que, en cada una de las soluciones obtenidas, se pueden sustituir las órbitas circulares por órbitas que siguen una sección cónica, bien sea una elipse, una parábola o una hipérbola. Estas soluciones vendrán caracterizadas por el hecho de que las razones entre las distancias mutuas de los 3 cuerpos permanece constante, aunque no necesariamente las distancias entre ellas que, de hecho, variarán con el tiempo.

Para ver esto, comenzamos por escribir el sistema de ecuaciones del movimiento, referido a un sistema de referencia fijo inercial con origen en el centro de masas, donde hemos elegido unidades apropiadas para que $k^2 = 1$. Si (ξ, η_i) son las coordenadas de los cuerpos y teniendo en cuenta que el movimiento tiene lugar en un plano estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \xi_1}{dt^2} &= -\frac{m_2(\xi_1 - \xi_2)}{r_{12}^3} - \frac{m_3(\xi_1 - \xi_3)}{r_{13}^3}, \\
 \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} &= -\frac{m_2(\eta_1 - \eta_2)}{r_{12}^3} - \frac{m_3(\eta_1 - \eta_3)}{r_{13}^3}, \\
 \frac{d^2 \xi_2}{dt^2} &= -\frac{m_1(\xi_2 - \xi_1)}{r_{12}^3} - \frac{m_3(\xi_2 - \xi_3)}{r_{23}^3}, \\
 \frac{d^2 \eta_2}{dt^2} &= -\frac{m_1(\eta_2 - \eta_1)}{r_{12}^3} - \frac{m_3(\eta_2 - \eta_3)}{r_{23}^3}, \\
 \frac{d^2 \xi_3}{dt^2} &= -\frac{m_1(\xi_3 - \xi_1)}{r_{13}^3} - \frac{m_2(\xi_3 - \xi_2)}{r_{23}^3}, \\
 \frac{d^2 \eta_3}{dt^2} &= -\frac{m_1(\eta_3 - \eta_1)}{r_{13}^3} - \frac{m_2(\eta_3 - \eta_2)}{r_{23}^3}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Sean (x_i, y_i) las coordenadas de m_i en un instante de tiempo fijo t_0 , y sean (r_i^0, ϕ_i) las coordenadas polares en dicho instante, es decir r_i^0 es la distancia al origen en el instante t_0 y ϕ_i el ángulo que forman el radio vector con el eje x . Entonces, las coordenadas para los cuerpos en el instante de tiempo t_0 pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r_1^0 \cos \phi_1, & x_2 &= r_2^0 \cos \phi_2, & x_3 &= r_3^0 \cos \phi_3, \\
 y_1 &= r_1^0 \sin \phi_1, & y_2 &= r_2^0 \sin \phi_2, & y_3 &= r_3^0 \sin \phi_3.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Asumiendo que la razón entre las distancias mutuas se mantiene constante, entonces se tiene que

$$r_1 = \rho r_1^{(0)}, \quad r_2 = \rho r_2^{(0)}, \quad r_3 = \rho r_3^{(0)},$$

siendo ρ la constante de proporcionalidad. Por otra parte, para que la configuración mantenga la misma forma, los vectores de posición tienen que haber girado el mismo ángulo θ en un instante t , como se ve en la Figura 2.3.

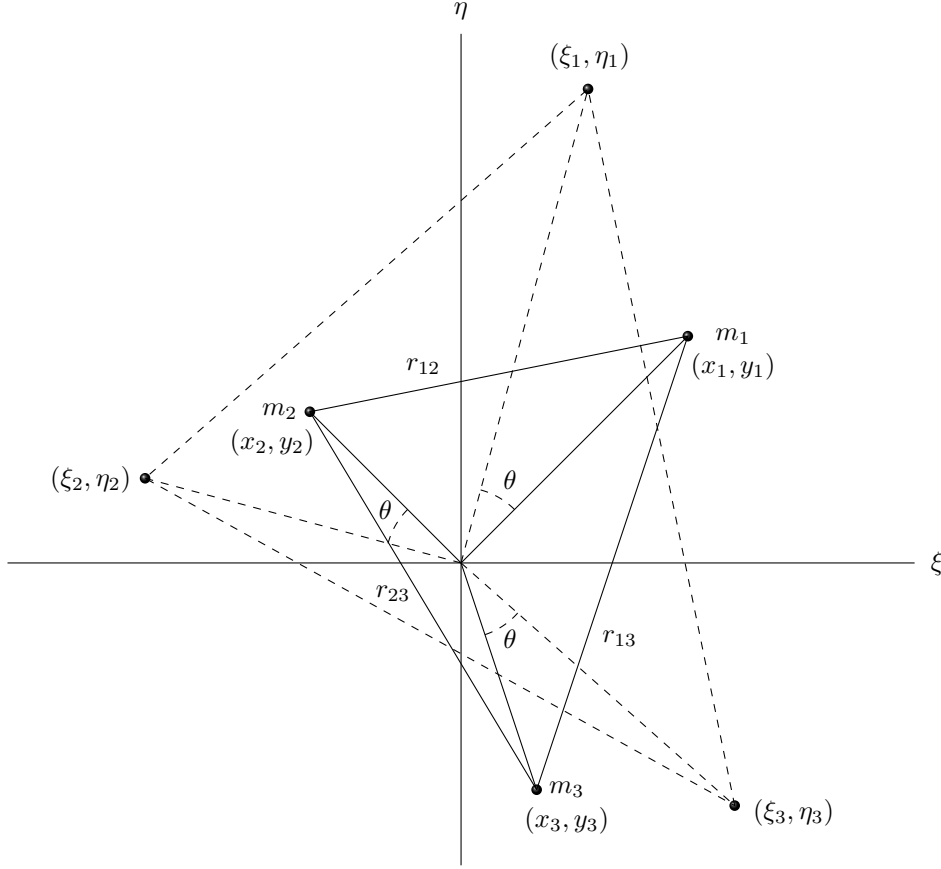


Figura 2.1: La configuración inicial se mantiene constante, salvo homotecias y rotaciones.

Así pues, si (ξ_i, η_i) son las coordenadas de m_i en el instante t , resulta

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= r_1^{(0)} \rho \cos(\theta + \phi_1) = (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \rho, \\
 \eta_1 &= r_1^{(0)} \rho \sin(\theta + \phi_1) = (x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta) \rho, \\
 \xi_2 &= r_2^{(0)} \rho \cos(\theta + \phi_2) = (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta) \rho, \\
 \eta_2 &= r_2^{(0)} \rho \sin(\theta + \phi_2) = (x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \rho, \\
 \xi_3 &= r_3^{(0)} \rho \cos(\theta + \phi_3) = (x_3 \cos \theta - y_3 \sin \theta) \rho, \\
 \eta_3 &= r_3^{(0)} \rho \sin(\theta + \phi_3) = (x_3 \sin \theta + y_3 \cos \theta) \rho.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Nótese que las ecuaciones (2.10) dependen solo de ρ y θ , es decir, del factor de escala y el ángulo de giro de la configuración inicial. Para encontrar las

ecuaciones en términos de ρ y θ basta derivar (2.12) respecto a t y sustituir en (2.10). De este modo llegamos a que

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_j &= (x_j \dot{\rho} - y_j \rho \dot{\theta}) \cos \theta - (y_j \dot{\rho} + x_j \rho \dot{\theta}) \sin \theta, \\ \ddot{\xi}_j &= (x_j \ddot{\rho} - 2y_j \dot{\rho} \dot{\theta} - x_j \rho \dot{\theta}^2 - y_j \rho \ddot{\theta}) \cos \theta - (y_j \ddot{\rho} + 2x_j \dot{\rho} \dot{\theta} - y_j \rho \dot{\theta}^2 + x_j \rho \ddot{\theta}) \sin \theta, \\ \dot{\eta}_j &= (y_j \dot{\rho} + x_j \rho \dot{\theta}) \cos \theta + (x_j \dot{\rho} - y_j \rho \dot{\theta}) \sin \theta, \\ \ddot{\eta}_j &= (y_j \ddot{\rho} + 2x_j \dot{\rho} \dot{\theta} - y_j \rho \dot{\theta}^2 + x_j \rho \ddot{\theta}) \cos \theta + (x_j \ddot{\rho} - 2y_j \dot{\rho} \dot{\theta} - x_j \rho \dot{\theta}^2 - y_j \rho \ddot{\theta}) \sin \theta,\end{aligned}$$

y sustituyendo en las ecuaciones (2.10)

$$\begin{aligned}x_i \ddot{\rho} - 2y_i \dot{\rho} \dot{\theta} - x_i \rho \dot{\theta}^2 - y_i \rho \ddot{\theta} &= - \left(\frac{m_j(x_i - x_j)}{r_{ij}^3} + \frac{m_k(x_i - x_k)}{r_{ik}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}, \\ y_i \ddot{\rho} + 2x_i \dot{\rho} \dot{\theta} - y_i \rho \dot{\theta}^2 + x_i \rho \ddot{\theta} &= - \left(\frac{m_j(y_i - y_j)}{r_{ij}^3} + \frac{m_k(y_i - y_k)}{r_{ik}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Con el fin de simplificar un poco las expresiones anteriores, introducimos una nueva variable ψ

$$\psi = \rho^2 \frac{d\theta}{dt}\tag{2.14}$$

que represente el momento angular. A partir de (2.13) obtenemos las relaciones

$$\begin{aligned}2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{1}{\rho} \frac{d\psi}{dt}, \\ \rho \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{\psi^2}{\rho^3},\end{aligned}$$

así las ecuaciones (2.13) se reducen a

$$\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{y_1}{x_1\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{x_1} \left(\frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{13}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{x_1}{y_1\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{y_1} \left(\frac{m_2(y_1 - y_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{13}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{y_2}{x_2\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{x_2} \left(\frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{23}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{x_2}{y_2\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{y_2} \left(\frac{m_1(y_2 - y_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(y_2 - y_3)}{r_{23}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{y_3}{x_3\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{x_3} \left(\frac{m_1(x_3 - x_1)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(x_3 - x_2)}{r_{23}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}, \\ \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{x_3}{y_3\rho} \frac{d\psi}{dt} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -\frac{1}{y_3} \left(\frac{m_1(y_3 - y_1)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(y_3 - y_2)}{r_{23}^3} \right) \frac{1}{\rho^2}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Estas ecuaciones son condiciones necesarias para la existencia de solución en la que la razón entre las distancias es constante. Las variables a determinar son ρ , que da el tamaño de la configuración en un instante y θ , que determina la orientación de la misma. Puesto que hay 2 variables y 6 ecuaciones, estas 6 ecuaciones deben ser consistentes, en el sentido de que proporcionen todas ellas la misma solución (ρ, θ) . En este sentido las condiciones de consistencia se dan cuando se cumple que

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} \quad (2.16)$$

o

$$\frac{d\psi}{dt} = 0. \quad (2.17)$$

En ambos casos, la parte izquierda de cada una de las ecuaciones diferenciales en (2.15) es la misma, por lo que los segundos miembros de dichas ecuaciones deben ser todos iguales. Esto da lugar al sistema

$$\begin{aligned} \frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_1 - x_2)}{r_{13}^3} &= n^2 x_1, \\ \frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{23}^3} &= n^2 x_2, \\ \frac{m_1(x_3 - x_1)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(x_3 - x_2)}{r_{23}^3} &= n^2 x_3, \\ \frac{m_2(y_1 - y_2)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(y_1 - y_3)}{r_{13}^3} &= n^2 y_1, \\ \frac{m_1(y_2 - y_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(y_2 - y_3)}{r_{23}^3} &= n^2 y_2, \\ \frac{m_2(y_3 - y_1)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(y_3 - y_2)}{r_{23}^3} &= n^2 y_3, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde n^2 es una constante.

Además de estas ecuaciones, tenemos las provenientes de considerar el centro de masas en el origen, esto es

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3. \end{aligned}$$

Analicemos ahora los 2 casos. El primero, cuando se da (2.16) implica que los 3 cuerpos, están sobre una recta. De este modo, podemos suponer que esta recta es el eje x por lo que

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0.$$

Así, (2.18) se reduce a 3 ecuaciones, que son equivalentes a las 3 primeras ecuaciones del sistema (2.6), donde la única diferencia es que antes suponíamos $r_{12} = 1$. De aquí se deduce que existen 3 soluciones colineales.

Por otra parte, si se verifica (2.16) y los cuerpos se mantiene en línea, la resultante de las fuerzas está dirigida en la dirección del centro de masas, es decir, es central y se cumple la ley de las áreas para cada una de las masas. Es decir

$$r_1^2 \frac{d\theta}{dt} = c_1, \quad r_2^2 \frac{d\theta}{dt} = c_2, \quad r_3^2 \frac{d\theta}{dt} = c_3,$$

con c_i constantes. Teniendo en cuenta que $r_i = \rho r_i^0$ resulta

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{c_1}{\left(r_1^{(0)}\right)^2}$$

y como

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \psi,$$

entonces tenemos que $\dot{\psi} = 0$. Es decir, acabamos de ver que si se cumple (2.16) se cumple también (2.17). Esto no quiere decir que los dos casos sean equivalentes, pero sí que, en cualquiera de las dos situaciones, el sistema (2.15) queda reducido a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho}{dt^2} - \frac{\psi^2}{\rho^3} &= -n^2 \frac{1}{\rho^2}, \\ \psi &= c_0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\psi}{\rho^2} = \frac{c_0}{\rho^2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Esta ecuaciones corresponden a las ecuaciones polares del problema de 2 cuerpos. Por tanto, ρ, θ definen un movimiento kepleriano, es decir los cuerpos se mueven siguiendo una curva que es una sección cónica, bien una elipse, una parábola o una hipérbola. En estas soluciones se incluye el caso particular en que las órbitas son circulares.

Analicemos ahora el segundo caso. Esto es, suponemos que (2.15) no se cumple, pero sí (2.16). Puesto que el sistema de ecuaciones (2.18) es equivalente al dado para las soluciones circulares (2.6), sabemos que existe una solución en la que los tres cuerpos se sitúan sobre los vértices de un triángulo equilátero. Es decir, volvemos a obtener las mismas soluciones y, argumentando como en el caso de las colineales, los tres cuerpos se mueven describiendo una órbita que es una sección cónica, cumpliéndose la ley de las áreas.

Un análisis detallado del sistema de ecuaciones (2.18) permite concluir que no existen más soluciones que las descritas anteriormente, con lo que para el caso de tres cuerpos solo existen cinco configuraciones centrales, para cualquier elección de tres masas finitas m_1, m_2 y m_3 . Estas cinco configuraciones centrales son las descritas en este capítulo, las tres colineales y las dos triangulares. A este resultado puede llegarse transformando el sistema (2.18) en un sistema de

ecuaciones polinómicas y después analizarlo bien mediante el uso de la resultante de dos polinomios o por medio de bases de Gröbner o bien usando variables adecuadas, como las variables de Dziobek [3]. Esto queda fuera del objetivo de este trabajo, más centrado en presentar los resultados clásicos respecto a las configuraciones centrales.

Capítulo 3

Soluciones colineales para N cuerpos

Una vez analizado el problema de las configuraciones centrales de tres cuerpos, lo inmediato sería pensar en tratar de determinar todas las posibles configuraciones centrales de cuatro cuerpos. Sin embargo, como ya dijimos en el primer capítulo, el problema de determinar el total de configuraciones centrales para un determinado número de masas es un problema nada sencillo y la finitud del número de soluciones es una conjetura que permanece sin resolver. Ahora bien, si imponemos alguna restricción sobre el tipo de configuración que deben seguir los cuerpos, el problema puede volverse tratable. Eso es lo que sucede cuando imponemos que todos ellos permanezcan alineados a lo largo del tiempo, conservando la razón entre sus distancias mutuas.

En este sentido, vamos a tratar de determinar el número de configuraciones centrales colineales, para n masas arbitrarias. Para ello, seguiremos la estrategia que usó en su día Moulton, basada en la aplicación del principio de inducción matemática. Así, partiendo del caso conocido de tres cuerpos, se puede dar la solución para un número de masas arbitrarias. Además, al final del capítulo, veremos cómo podemos llegar al mismo resultado usando otro tipo de argumentos, siguiendo la línea de razonamiento usada para demostrar que existe al menos una configuración central para un número arbitrario de masas finitas.

3.1 Planteamiento del problema

En primer lugar debemos escoger un sistema de referencia adecuado. Dado que estamos buscando soluciones del problema de n cuerpos con una estructura particular, cuando todas las masas se mantienen alineadas a lo largo del tiempo, haremos uso de ello para elegir nuestro sistema de referencia. Notemos que el movimiento de las masas es plano, por lo que todas ellas deben permanecer en el plano del movimiento en todo instante. Así, podemos considerar un sistema de referencia plano, coincidente con el del movimiento, cuyo origen situaremos

en el centro de masas del sistema. De este modo, la posición de cada uno de los n cuerpos estará descrita por solo dos coordenadas.

Denotemos por m_1, m_2, \dots, m_n las masas los n cuerpos, siendo sus respectivas coordenadas $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$. Entonces, eligiendo unidades de medida adecuadas para que G , la constante de gravitación, sea la unidad, las ecuaciones del movimiento vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad i = 1, \dots, n \\ U &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1, k \neq j}^n \frac{m_j m_k}{r_{jk}}, \\ r_{jk} &= \sqrt{(\xi_j - \xi_k)^2 + (\eta_j - \eta_k)^2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A partir de ellas se prueba siguiente Teorema, que redundo en el hecho de que el movimiento es plano.

Teorema 5 *Las ecuaciones del movimiento, (3.1), admiten la integral*

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} \right).$$

Demostración 5 *Basta ver que la derivada de esta expresión es cero. Ahora bien, derivando resulta*

$$\sum_{i=1}^n m_i (\dot{\xi}_i \dot{\eta}_i + \xi_i \ddot{\eta}_i - \dot{\xi}_i \dot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i \eta_i),$$

por lo que si

$$\sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i \eta_i) = 0$$

llegaríamos al resultado requerido. Ahora bien,

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = - \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{m_i m_k (\xi_i - \xi_k)}{r_{ik}^3}, \\ m_i \ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i} = - \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{m_i m_k (\eta_i - \eta_k)}{r_{ik}^3}, \end{aligned}$$

por lo que

$$m_i (\xi_i \ddot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i \eta_i) = \sum_{k=1, k \neq i}^n \frac{\eta_i \xi_k - \eta_k \xi_i}{r_{ik}^3}.$$

De aquí resulta inmediato comprobar que $\sum_{i=1}^n m_i(\xi_i \ddot{\eta}_i - \ddot{\xi}_i \eta_i) = 0$, por lo que el teorema queda probado. ■

El resultado anterior nos dice que el momento angular total del sistema se conserva. De hecho, cada uno de los sumandos es igual al momento angular de cada uno de los cuerpos, lo que podemos relacionar con la ley de las áreas del movimiento de dos cuerpos. Sea $\vec{r}_i = (\xi_i, \eta_i) = (r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$ el vector de posición de cada uno de los cuerpos, donde r_i y θ_i son sus coordenadas polares, es decir

$$r_i = \sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2}.$$

Es inmediato comprobar que

$$\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} = r_i^2 \dot{\theta}_i,$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \frac{d\theta_i}{dt} = c. \quad (3.2)$$

Como los n cuerpos permanecen colineales, el vector aceleración resultante siempre pasa por el origen y la fuerza es central. Por lo tanto, en las soluciones colineales, se tiene que cumplir la ley de las áreas para cada uno de los cuerpos por separado, es decir

$$m_i r_i^2 \frac{d\theta_i}{dt} = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Por otra parte, al permanecer los cuerpos sobre una misma línea, todos ellos deben rotar con la misma velocidad angular respecto al centro de masas, es decir, debe cumplirse

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt} = \dots = \frac{d\theta_n}{dt}. \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta (3.3) y (3.4) se sigue que

$$\frac{r_i}{r_j} = \sqrt{\frac{m_j c_i}{m_i c_j}} = a_{ij}, \quad (3.5)$$

donde a_{ij} es una constante. Es decir, si existen soluciones colineales, las proporciones entre las distancias de los cuerpos al origen son constantes, de donde se deduce fácilmente que las relaciones de sus distancias mutuas son también constantes.

Como las n masas permanecen colineales, existe un vector $(\xi(t), \eta(t))$ que define en cada instante la dirección de la recta en la que están los n cuerpos.

Por tanto, existen constantes x_i de manera que las coordenadas de cada una de las masas la podemos expresar como

$$\begin{aligned}\xi_i &= x_i \xi, & i &= 1, \dots, n, \\ \eta_i &= x_i \eta, & i &= 1, \dots, n.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Sustituyendo en (3.1), el sistema de ecuaciones se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \xi_i}{dt^2} &= x_i \frac{d^2 \xi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \xi}{dt^2} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j (x_i - x_j)}{x_i |x_i - x_j|^3} \frac{\xi}{r^3}, & i &= 1, \dots, n \\ \frac{d^2 \eta_i}{dt^2} &= x_i \frac{d^2 \eta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \eta}{dt^2} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j (x_i - x_j)}{x_i |x_i - x_j|^3} \frac{\eta}{r^3}, & i &= 1, \dots, n \\ r &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Observemos que el nuevo sistema consta de $2n$ ecuaciones, divididas en dos bloques de n ecuaciones. Puesto que en cada bloque el miembro de la izquierda es siempre el mismo, debe suceder que el segundo miembro sea también siempre el mismo, por lo que debe existir una constante ω^2 , que veremos es positiva, de manera que

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_j (x_i - x_j)}{x_i |x_i - x_j|^3} = \omega^2, \quad i = 1, \dots, n.\tag{3.8}$$

Es decir, desarrollando (3.8) e introduciendo la notación $r_{i;j} = |(x_i - x_j)|$, tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & + & \frac{m_2(x_1-x_2)}{r_{1;2}^3} & + & \dots & + & \frac{m_n(x_1-x_n)}{r_{1;n}^3} & = & \omega^2 x_1, \\ \frac{m_1(x_2-x_1)}{r_{2;1}^3} & + & 0 & + & \dots & + & \frac{m_n(x_2-x_n)}{r_{2;n}^3} & = & \omega^2 x_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{m_1(x_n-x_1)}{r_{n;1}^3} & + & \frac{m_2(x_n-x_2)}{r_{n;2}^3} & + & \dots & + & 0 & = & \omega^2 x_n, \end{array}\tag{3.9}$$

que constituyen las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de soluciones colineales. Falta por ver que la constante que hemos introducido es, en efecto, positiva. Para ello, supongamos, sin pérdida de generalidad,

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Puesto que el centro de masas está en el origen, resulta $x_1 < 0$, por lo que para que la primera ecuación en (3.9) tenga sentido tiene que ser $\omega^2 > 0$. De esta manera, dados $\omega^2, m_1, \dots, m_n$ positivos, encontrar el número de soluciones colineales se reduce a encontrar el número de soluciones reales del sistema (3.9) que, como veremos, dependerá de n . Nótese que, una vez resuelto el sistema, las posiciones de los objetos quedan dadas por (3.6), toda vez que las ecuaciones

diferenciales (3.7) hayan sido resueltas. Ahora bien, estas ecuaciones corresponden a las ecuaciones del problema de dos cuerpos, por lo que todos los cuerpos siguen órbitas que son secciones cónicas semejantes. En el caso de que se trate de elipses, podemos elegir x_i de manera que coincida con el semieje mayor de la elipse descrita por la masa m_i , y entonces ω corresponde al movimiento medio de revolución del sistema.

Por último, una vez que se conoce una solución de (3.9) existe una familia de configuraciones colineales dependiente de seis parámetros. De éstos, los dos primeros definen el plano orbital, el tercero la orientación de la órbita en el plano, el cuarto la escala del sistema, el quinto la excentricidad de las órbitas y el sexto el instante en que los cuerpos se encuentran en el periastro (punto de máximo acercamiento al foco).

3.2 Número de configuraciones colineales

El objetivo de esta sección es calcular el número de soluciones reales del sistema (3.9), es decir, el número de soluciones colineales para un problema de n cuerpos. Para ello usaremos inducción sobre el número de cuerpos. Como base de la inducción tenemos el caso de tres cuerpos, discutido en el Capítulo 2. Así, si llamamos \mathcal{N}_n al número de soluciones colineales cuando tenemos n cuerpos,

$$\mathcal{N}_3 = 3 = \frac{1}{2}3!.$$

Lo siguiente será probar que

$$\mathcal{N}_{n+1} = (n+1)\mathcal{N}_n, \quad (3.10)$$

lo que se hará en dos pasos. En un primer paso, demostraremos que (3.10) se cumple cuando a un conjunto de n masas se le añade otra, m_{n+1} , de masa infinitesimal¹. En el segundo paso, veremos que el número de soluciones reales del sistema (3.9) no cambia cuando la masa m_{n+1} se incrementa de manera continua. Por tanto, podemos concluir por inducción que

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{2}n!.$$

Nos queda por ver cómo demostrar los dos pasos intermedios de la inducción. Veamos el primero de ellos

Teorema 6 *Si al sistema con masas m_1, \dots, m_n añadimos una masa infinitesimal m_{n+1} , el número de soluciones reales del sistema (3.9) es $(n+1)\mathcal{N}_n$, siendo \mathcal{N}_n el número de soluciones de (3.9) para n masas.*

¹El concepto de infinitesimal se usa aquí con un sentido particular, el clásico de la Mecánica Celeste. De este modo, la masa infinitesimal se ve afectada por el resto de masas, mientras que ésta no ejerce fuerza alguna sobre las demás. A todos los efectos, su masa es cero.

Demostración 6 Sean n cuerpos con sus respectivas masas m_1, \dots, m_n y añadamos una nueva masa, m_{n+1} . Ahora el sistema (3.9) constará de $n+1$ ecuaciones. Denotando por ϕ_j a la ecuación j -ésima, las n primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned}\phi_1 &\equiv -\omega^2 x_1 + 0 + \frac{m_2(x_1-x_2)}{r_{1;2}^3} + \dots + \frac{m_n(x_1-x_n)}{r_{1;n}^3} + \frac{m_{n+1}(x_1-x_{n+1})}{r_{1;n+1}^3} = 0, \\ \phi_2 &\equiv -\omega^2 x_2 + \frac{m_1(x_2-x_1)}{r_{2;1}^3} + 0 + \dots + \frac{m_n(x_2-x_n)}{r_{2;n}^3} + \frac{m_{n+1}(x_2-x_{n+1})}{r_{2;n+1}^3} = 0, \\ &\vdots \\ \phi_n &\equiv -\omega^2 x_n + \frac{m_1(x_n-x_1)}{r_{n;1}^3} + \frac{m_2(x_n-x_2)}{r_{n;2}^3} + \dots + 0 + \frac{m_{n+1}(x_n-x_{n+1})}{r_{n;n+1}^3} = 0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Ahora bien, como $m_{n+1} = 0$, (3.11) coincide con (3.9), el sistema de ecuaciones que nos da las soluciones con masas m_1, \dots, m_n . Por otra parte, la última de las ecuaciones, correspondiente a la nueva masa, vendrá dada por

$$\phi_{n+1} \equiv -\omega^2 x_{n+1} + \frac{m_1(x_{n+1}-x_1)}{r_{1;n+1}^3} + \dots + \frac{m_n(x_{n+1}-x_n)}{r_{n;n+1}^3} = 0.\tag{3.12}$$

Sea $x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ una solución del sistema (3.11) que, por hipótesis inductiva, suponemos tiene $\mathcal{N}_n = \frac{1}{2}n!$ soluciones reales distintas. Llevemos esta solución a la ecuación (3.12). En este caso, ϕ_{n+1} se convierte en una función que depende de la coordenada x_{n+1} de la nueva masa infinitesimal. Para encontrar soluciones del sistema completo, debemos resolver $\phi_{n+1}(x) = 0$.

Notemos que la función ϕ_{n+1} está bien definida para todo x excepto cuando $x = x_j^{(0)}$, con $j = 1, \dots, n$. Supongamos que los $x_j^{(0)}$ están ordenados, de manera que

$$x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \dots < x_n^{(0)},$$

entonces ϕ_{n+1} consta de $n+1$ ramas definidas en los intervalos

$$(-\infty, x_1^{(0)}), \quad (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}), \quad \dots, \quad (x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}), \quad (x_n^{(0)}, +\infty).\tag{3.13}$$

Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_{n+1}(x) &= +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow x_j^{(0)-}} \phi_{n+1}(x) &= -\infty, \quad j = 1, \dots, n, \\ \lim_{x \rightarrow x_j^{(0)+}} \phi_{n+1}(x) &= +\infty, \quad j = 1, \dots, n, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_{n+1}(x) &= -\infty,\end{aligned}\tag{3.14}$$

por lo que ϕ_{n+1} cambia de signo en cada uno de los $n+1$ intervalos (3.13). Por tanto, por cada solución del sistema (3.11), la ecuación (3.12) tiene al menos $n+1$ soluciones. Pero ϕ_{n+1} es una función decreciente en cada uno de los intervalos donde está definida, ya que

$$\frac{d\phi_{n+1}}{dx_{n+1}} \equiv -\omega^2 - \frac{2m_1}{r_{1n+1}^3} - \frac{2m_2}{r_{2n+1}^3} - \dots - \frac{2m_n}{r_{nn+1}^3} < 0,$$

por lo que el número de ceros de ϕ_{n+1} es exactamente $n+1$. Así, acabamos de ver que, por cada solución de (3.11), la ecuación (3.12) tiene exactamente $n+1$ soluciones y, por tanto, el total de configuraciones centrales colineales para el caso de $n+1$ masas, cuando $m_{n+1} = 0$, es $\mathcal{N}_{n+1} = (n+1)\mathcal{N}_n$. ■

Para completar el razonamiento inductivo, nos falta comprobar que si la masa m_{n+1} no es cero, el número de soluciones reales permanece inalterado. Este es precisamente el objetivo del siguiente Teorema.

Teorema 7 *Si se incrementa de manera continua el valor de la masa m_{n+1} , el número de soluciones, $(n+1)\mathcal{N}_n$, permanece inalterado, de manera que las posiciones de los $n+1$ cuerpos permanecen distintas, finitas y reales.*

Demostración 7 Sea $x_j = x_j^{(0)}$ con $j = 1, \dots, n+1$ una de las $(n+1)\mathcal{N}_n$ soluciones reales de las ecuaciones (3.11) y (3.12), que sabemos que existen cuando $m_{n+1} = 0$. Probaremos que, cuando m_{n+1} se incrementa de manera continua hasta alcanzar cualquier valor positivo finito, entonces la solución $x_j^{(0)}$ ($j = 1, \dots, n+1$) varía de manera continua, de tal modo que $x_j^{(0)}$ permanecen reales, finitas y distintas y satisfaciendo las ecuaciones (3.11) y (3.12). De aquí se sigue que existen al menos $(n+1)\mathcal{N}_n$ soluciones reales de (3.11) y (3.12) para cualquier conjunto finito de masas m_1, \dots, m_{n+1} . Probaremos, también, que no puede aparecer ninguna otra solución al incrementar el valor de m_{n+1} . Una vez probado esto, concluimos que hay exactamente $(n+1)\mathcal{N}_n$ soluciones del sistema de ecuaciones (3.11) y (3.12), para cualquier conjunto de $n+1$ masas finitas. Para ello debemos considerar las siguientes tres situaciones

1. No puede darse el caso en que $x_i^{(0)} = x_j^{(0)}$ con $i \neq j$.
2. $x_j^{(0)}$ no puede hacerse infinito.
3. No pueden existir raíces múltiples.

Analicemos cada uno de estos tres casos.

Caso 1.

Dada una solución del sistema (3.11) y (3.12), elegimos adecuadamente los índices de las masas para que se tenga

$$x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \dots < x_n^{(0)} < x_{n+1}^{(0)}.$$

Supongamos ahora que existen índices $j < k$ tales que, al variar la masa infinitesimal, $x_j^{(0)} - x_k^{(0)}$ se aproxima a cero, mientras que $x_j^{(0)}$ y $x_k^{(0)}$ permanecen finitos. Es decir, estamos suponiendo que $r_{j;k} \rightarrow 0$. Ahora bien, $r_{j;k}$ aparece en las ecuaciones ϕ_j y ϕ_k del sistema (3.11). En concreto tenemos

$$\begin{aligned}\phi_j &\equiv -\omega^2 x_j + \dots + \frac{m_k(x_j - x_k)}{r_{j;k}^3} + \dots + \frac{m_{n+1}(x_j - x_{n+1})}{r_{j;n+1}^3} = 0, \\ \phi_k &\equiv -\omega^2 x_k + \dots + \frac{m_j(x_k - x_j)}{r_{j;k}^3} + \dots + \frac{m_{n+1}(x_k - x_{n+1})}{r_{k;n+1}^3} = 0,\end{aligned}$$

por lo que el término que contiene $r_{j;k}$ en ϕ_j tiende a infinito, mientras que en ϕ_k tiende a menos infinito. Ahora bien, como $\phi_j = 0$, debe existir otro índice $i \neq j, k$ tal que $r_{i;j} \rightarrow 0$ y, además,

$$\frac{m_i(x_j - x_i)}{r_{i;j}^3} \rightarrow +\infty,$$

por lo que es claro que $i < j$. Argumentando de la misma manera, debe existir otro índice $p < i$ tal que $r_{i;p} \rightarrow 0$ y

$$\frac{m_p(x_i - x_p)}{r_{i;p}^3} \rightarrow +\infty.$$

Pero esto es imposible, ya que en algún momento llegaremos al primer índice y entonces todos los términos de la ecuación ϕ_1 serían negativos, excepto $-\omega^2 x_1 > 0$. Pero este término permanece finito, mientras que hay, al menos uno, que se hace infinitamente negativo, por lo que no podrá satisfacerse la ecuación $\phi_1 = 0$. Esto es absurdo, ya que las raíces del sistema varían de manera continua con los parámetros y deberían satisfacerse todas las ecuaciones. En consecuencia, la suposición de que algún $r_{j;k} \rightarrow 0$ para valores finitos de $x_1^{(0)}, \dots, x_{n+1}^{(0)}$ y masas m_1, \dots, m_{n+1} no puede ser cierta.

Caso 2.

Supongamos, como en el caso anterior, que los índices se han elegido adecuadamente para que

$$x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \dots < x_n^{(0)} < x_{n+1}^{(0)}.$$

sea una solución del sistema (3.11) y (3.12). Por otra parte, como el centro de masas se encuentra en el origen, se verifica

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n + m_{n+1} x_{n+1} = 0. \quad (3.15)$$

Supongamos ahora que existe un índice, $1 \leq j \leq n+1$, de tal manera que $x_j^{(0)} \rightarrow -\infty$. Entonces, teniendo en cuenta (3.15), tiene que existir otro índice, $j < k \leq n+1$, tal que $x_k^{(0)} \rightarrow +\infty$. En cualquier caso, tendremos:

$$x_1^{(0)} \rightarrow -\infty, \quad x_{n+1}^{(0)} \rightarrow +\infty.$$

Veamos que esto no puede darse, llegando a una contradicción, como se hizo en el caso 1.

Tomemos la ecuación ϕ_1 , que recordamos es:

$$\phi_1 \equiv -\omega^2 x_1 + \frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{1;2}^3} + \dots + \frac{m_{n+1}(x_1 - x_{n+1})}{r_{1;n+1}^3} = 0.$$

Esta ecuación debe cumplirse en el caso en que $x_1^{(0)} \rightarrow -\infty$, pues estamos suponiendo que seguimos teniendo una solución del sistema. Como el primer sumando es positivo e infinitamente grande, necesariamente tiene que haber otro que sea infinitamente negativo, para lo cual debe ser

$$x_1^{(0)} - x_2^{(0)} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x_2^{(0)} \rightarrow -\infty.$$

Ahora consideramos la ecuación correspondiente a ϕ_2

$$-\omega^2 x_2 + \frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{1;2}^3} + \frac{m_3(x_2 - x_3)}{r_{2;3}^3} + \dots + \frac{m_{n+1}(x_1 - x_{n+1})}{r_{1;n+1}^3} = 0.$$

Como se ve, los dos primeros términos son positivos e infinitamente grandes, por lo que, razonado como antes, $x_3^{(0)} \rightarrow -\infty$. De la misma manera podemos proceder con el resto de ecuaciones, por lo que al final tendríamos que $x_{n+1}^{(0)} \rightarrow -\infty$, pero esto está en contradicción con que el centro de masas esté en el origen. Por lo tanto concluimos que ninguna de las soluciones puede irse a infinito al variar de manera continua el valor de m_{n+1} .

Los casos 1 y 2 nos indican que, al variar continuamente el valor de m_{n+1} , el número de soluciones que existía para $m_{n+1} = 0$ se mantiene. Pero, al mismo tiempo, nos indican que ninguna solución existente cuando todas las masas son estrictamente positivas, pueden cambiar cuando una de ellas se acerca a cero, siendo que dos valores de x_j coincidan o alguno de ellos se haga infinitamente grande. Nos queda por ver que no puede cambiar el número de soluciones cuando dos raíces complejas se vuelven reales. El caso en que un par de raíces reales pasen a ser complejas conjugadas no es preciso estudiarlo, ya que, si eso sucede, ambas tienen que coincidir en algún momento y eso ha quedado descartado en el caso 1.

Caso 3.

Para que dos raíces complejas pasen a ser reales, al cambiar de manera continua m_{n+1} , necesariamente en algún momento tiene que haber una raíz múltiple. En ese caso, la raíz no solo es múltiple, sino que también es real. Además, si $x_j = x_j^{(0)}$, ($j = 1, \dots, n+1$), es dicha solución múltiple, debe verificarse el sistema de ecuaciones (3.11) y (3.12) y también

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{n+1}} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.16)$$

Es decir, el jacobiano del sistema de ecuaciones, evaluado en $x_j^{(0)}$, debe anularse.

Probaremos, ahora, que $\Delta \neq 0$ para cualesquiera valores finitos de x_j y masas positivas m_j , ($j = 1, \dots, n+1$). Así, teniendo en cuenta las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.16), resulta

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{2m_2}{r_{1;2}^3} & \cdots & \frac{2m_{n+1}}{r_{1;n+1}^3} \\ \frac{2m_1}{r_{2;1}^3} & a_2 & \cdots & \frac{2m_{n+1}}{r_{2;n+1}^3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2m_1}{r_{n+1;1}^3} & \frac{2m_2}{r_{n+1;2}^3} & \cdots & a_{n+1} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= -w^2 - 0 - \frac{2m_2}{r_{1;2}^3} - \frac{2m_3}{r_{1;3}^3} - \cdots - \frac{2m_{n+1}}{r_{1;n+1}^3}, \\ a_2 &= -w^2 - \frac{2m_1}{r_{2;1}^3} - 0 - \frac{2m_3}{r_{2;3}^3} - \cdots - \frac{2m_{n+1}}{r_{2;n+1}^3}, \\ &\vdots \\ a_{n+1} &= -w^2 - \frac{2m_1}{r_{n+1;1}^3} - \cdots - \frac{2m_n}{r_{n+1;n}^3} - 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nótese que $a_j < 0$ para $j = 1, \dots, n+1$. Aunque estamos considerando masas estrictamente positivas, si $m_{n+1} = 0$, entonces $\Delta = a_{n+1}\Delta'$, siendo Δ' un determinante como (3.16), correspondiente a un sistema de n masas y a_{n+1} un factor estrictamente negativo. Por tanto, si llegamos a probar que $\Delta \neq 0$, estamos cubriendo el caso límite en que $m_{n+1} = 0$.

Hay algunas propiedades evidentes para Δ :

1. Si la fila j -ésima la multiplicamos por m_j , ($j = 1, \dots, n+1$), el determinante se convierte en el de una matriz simétrica.
2. La suma de los elementos de una fila ($j = 1, \dots, n+1$) es igual a $-\omega^2$, por lo que ω^2 es un factor de Δ .
3. Uno de los términos del desarrollo de Δ es $(-1)^{n+1}\omega^{2n+2}$. Además,

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n+1} = (-1)^{n+1}P, \quad (3.19)$$

siendo P una cantidad estrictamente positiva.

Consideremos ahora el desarrollo completo de Δ . Nos encontraremos con dos tipos de términos; aquellos que tienen signo $(-1)^{n+1}$ y aquellos que tienen el signo contrario. Ahora bien, cada uno de los términos con signo $(-1)^n$ se cancela con uno de los términos que aparecen en (3.19), por lo que el signo de todo el determinante es $(-1)^{n+1}$. Por otra parte, $(-1)^{n+1}\omega^{2n+2}$ es uno de los términos del desarrollo de Δ , y es distinto de cero. En conclusión, $\Delta \neq 0$ y no pueden existir raíces múltiples.

En lo anterior hemos usado, básicamente, la propiedad 3. Sin embargo, se puede dar una prueba alternativa, haciendo uso de las propiedades 2 y 3. En efecto, sabemos que ω^2 es un factor del determinante, por lo que cada término del desarrollo del mismo lo tiene como factor. Como ω^2 solo aparece en los elementos de la diagonal principal, cada uno de los términos del desarrollo depende de uno de los a_j . Consideremos uno cualquiera de dichos términos y supongamos, sin pérdida de generalidad, que depende de a_1 . Entonces, desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila, este término solo puede provenir del producto de a_1 por su correspondiente menor complementario, que tiene la misma estructura que Δ . Llamemos Δ_1 a dicho menor, que escribimos como

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_2 & \frac{2m_3}{r_{2;3}^3} & \cdots & \frac{2m_{n+1}}{r_{2;n+1}^3} \\ \frac{2m_2}{r_{3;2}^3} & a_3 & \cdots & \frac{2m_{n+1}}{r_{3;n+1}^3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{2m_2}{r_{n+1;2}^3} & \frac{2m_3}{r_{n+1;3}^3} & \cdots & a_{n+1} \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

Para Δ_1 se cumple que la suma de los elementos de la fila j -ésima es igual a

$$-\omega^2 - \frac{2m_1}{r_{1;j}^3}, \quad j = 2, \dots, n+1. \quad (3.21)$$

Es decir, cada término del desarrollo de Δ_1 está multiplicado por uno de los elementos que aparecen en (3.21), para algún $2 \leq j \leq n+1$. Pero estos elementos solo aparecen en la diagonal principal, por lo que podemos volver a argumentar como antes, diciendo que cada término del desarrollo de Δ_1 depende de uno de los elementos de la diagonal principal, es decir de algún a_j , $2 \leq j \leq n+1$. Ahora, volveríamos a aplicar lo mismo al desarrollo del menor Δ_1 y, continuando, paso a paso, llegaríamos a ver que todo término no nulo de Δ depende de todos los términos de la diagonal principal. Así, por la propiedad 3, todos estos términos tienen el mismo signo, $(-1)^{n+1}$. Pero, además, uno de los términos que aparece en el desarrollo de Δ es $(-1)^{n+1}\omega^{2n+2}$, por lo que

$$|\Delta| > \omega^{2n+2} > 0.$$

y entonces $\Delta \neq 0$, como ya habíamos dicho anteriormente.

Una vez demostrados los casos 1, 2 y 3, se sigue, como habíamos dicho al principio, el enunciado del teorema y el número de soluciones cuando m_{n+1} es estrictamente positiva coincide con el número de soluciones cuando $m_{n+1} = 0$. ■

Como consecuencia de los Teoremas 6 y 7, el número de soluciones reales para las ecuaciones (3.9) es $\mathcal{N}_n = n!/2$. La demostración que hemos realizado está basada en el artículo original de Moulton [9] y se trata de una prueba por inducción en la que el paso inductivo se hace, de una manera ingeniosa, en dos partes. Sin embargo, la demostración es larga y, en algunas fases, difícil de seguir. No obstante, la idea principal está fundamentada en el hecho de que la función ϕ_{n+1} , dada por (3.12), presenta n singularidades y consta de $n + 1$ ramas, en cada una de las cuales encontramos una nueva solución. Con una idea muy similar se puede dar una demostración más elegante, que se debe a Richard Moeckel [8] y que sigue la línea de la demostración del Teorema 4.

Teorema 8 *Para un sistema de n masas positivas colineales, tenemos exactamente $\frac{n!}{2}$ configuraciones centrales. Una por cada ordenación de las masas módulo una rotación de π .*

Demostración 8 *Por claridad, haremos la demostración para el caso de tres masas. No obstante el argumento es el mismo para el caso general.*

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ la posición de tres masas positivas sobre una línea recta y sea

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 = 1\}$$

el elipsoide de masas, introducido en (1.12), y que es topológicamente equivalente a una 2-esfera. Si fijamos el centro de masas en el origen, entonces queda fijado el siguiente plano

$$G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0\}.$$

Así, $S^1 = S \cap G$ es un círculo máximo sobre el plano G . Si quitamos las singularidades, el conjunto $S^1 \setminus \Delta$, donde

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \text{ o } x_1 = x_3 \text{ o } x_2 = x_3\},$$

tiene $3!$ componentes conexas, como se ve en la Figura 3.2. Cada una de ellas corresponde a una ordenación de las masas sobre la línea recta en la que se encuentran.

Sea \bar{U} , la restricción de U sobre el conjunto $S^1 \setminus \Delta$. Se tiene que $\bar{U} \rightarrow +\infty$ cuando $\mathbf{x} \rightarrow \Delta$, por lo que \bar{U} tiene al menos un mínimo en cada una de las componentes conexas, por lo que existen al menos $3!$ configuraciones centrales colineales.

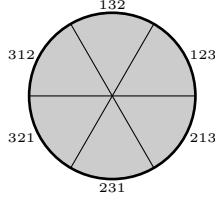


Figura 3.1: El conjunto \mathcal{S} , para el caso de las configuraciones centrales de tres cuerpos, es la frontera del círculo sombreado, que representa al conjunto $R^2 < 1$ sobre el plano G definido por el centro de masas. El conjunto de singularidades Δ corta a este plano a lo largo de tres líneas que dividen a \mathcal{S} en seis arcos, uno por cada ordenación de los tres cuerpos.

Sea \mathbf{x}_0 dicho mínimo. Entonces, por el Teorema 3, \mathbf{x}_0 es un punto crítico de la función

$$F(x_1, x_2, x_3; \lambda) = U + \lambda(m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + m_3 x_3^2 - 1),$$

con $\lambda = U(\mathbf{x}_0)/2 > 0$. Ahora bien,

$$D^2 F(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{-2m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} & \frac{-2m_1 m_3}{|x_1 - x_3|^3} \\ \frac{-2m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} & a_2 & \frac{-2m_2 m_3}{|x_2 - x_3|^3} \\ \frac{-2m_1 m_3}{|x_1 - x_3|^3} & \frac{-2m_2 m_3}{|x_2 - x_3|^3} & a_3 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= 2m_1 \lambda + \frac{2m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} + \frac{2m_1 m_3}{|x_1 - x_3|^3}, \\ a_2 &= 2m_2 \lambda + \frac{2m_1 m_2}{|x_1 - x_2|^3} + \frac{2m_2 m_3}{|x_2 - x_3|^3}, \\ a_3 &= 2m_3 \lambda + \frac{2m_1 m_3}{|x_1 - x_3|^3} + \frac{2m_2 m_3}{|x_2 - x_3|^3}. \end{aligned}$$

Con una argumentación similar a la dada en el Teorema 7, se puede probar que $D^2 F(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva. Ahora bien, esto es así cualquiera que sea el punto crítico \mathbf{x}_0 , por lo que la función F es convexa y solo puede existir un punto crítico en cada componente conexa. Por tanto existen $3!$ configuraciones centrales colineales. Si tenemos en cuenta la simetría por reflexión respecto al origen, el total de configuraciones centrales colineales es justamente la mitad. Así, en general $\mathcal{N}_n = n!/2$. ■

Capítulo 4

Medias ponderadas y configuraciones centrales

Los resultados de los dos capítulos precedentes se han demostrado siguiendo ideas clásicas. Sin embargo, ya hemos visto que, al menos para las soluciones colineales, otro tipo de argumentos permiten llegar a las mismas conclusiones. De hecho, es frecuente ver diferentes pruebas de los mismos resultados por distintas técnicas y, en algunas ocasiones, nos encontramos con que técnicas propias de otras áreas, aparentemente alejadas, permiten dar demostraciones elegantes y sencillas.

En este capítulo veremos cómo las configuraciones centrales pueden abordarse desde la perspectiva de las medias ponderadas y cómo los resultados de los capítulos anteriores se pueden probar haciendo uso de las mismas. Para ello, vamos a introducir el concepto de media ponderada de orden p y dar algunos resultados de desigualdades entre ellas. A partir de aquí, y siguiendo las ideas de Saari [12], probaremos la existencia de las soluciones triangulares para el problema de tres cuerpos, así como que el número de soluciones colineales, para n masas positivas finitas, es $n!/2$.

4.1 Medias ponderadas

Para empezar el capítulo, introduzcamos algunas definiciones y resultados interesantes

Definición 1 Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ una secuencia de números positivos y sean m_1, \dots, m_n valores fijos positivos, llamados pesos, correspondientes a la secuencia \mathbf{a} . Entonces para $p \neq 0$, la p -ésima medida ponderada de \mathbf{a} se define como

$$M_p(\mathbf{a}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1)$$

En esta definición nos encontramos con varios casos muy conocidos dependiendo de los valores de p :

1. Media aritmética ponderada: Este caso se da si tomamos el valor de $p = 1$

$$M_1(\mathbf{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

2. Media cuadrática ponderada: Este caso se da si tomamos el valor de $p = 2$

$$M_2(\mathbf{a}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^2}{\sum_{i=1}^n m_i}}.$$

3. Media armónica ponderada: Este caso se da si tomamos el valor de $p = -1$

$$M_{-1}(\mathbf{a}) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{\sum_{i=1}^n m_i a_i}.$$

Además de estos casos, tenemos otros casos de medias conocidas cuando el valor de p se encuentra en un caso límite. En este sentido, cuando $p = 0$ nos encontramos con la media geométrica. En efecto, tomando límites cuando $p \rightarrow 0$ resulta

$$\log \left(\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando las propiedades del logaritmo, llegamos a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^n m_i a_i^p - \log \sum_{i=1}^n m_i}{p}$$

Aplicando, ahora, la regla de L'Hôpital

$$\lim_{p \rightarrow 0} \log \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i \log a_i}{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \log a_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}} = \exp \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \log a_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) = \left(\prod_{i=1}^n a_i^{m_i} \right)^{1/\sum_{i=1}^n m_i},$$

que es la conocida media geométrica, que podemos representar por $M_0(\mathbf{a})$.

En el caso límite en que $p = +\infty$, nos encontramos con que la media ponderada de orden infinito coincide con el máximo valor de los elementos de \mathbf{a} . Para verlo, sea $a_M = \max_{1 \leq j \leq n} a_j$. Tomando límites en la expresión general de las medias ponderadas resulta

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{p \rightarrow +\infty} a_M \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{a_i}{a_M} \right)^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora bien, $a_i/a_M \leq 1$, con igualdad si $a_i = a_M$. Sea \mathcal{I} el conjunto de índices tal que si $j \in \mathcal{I}$ entonces $a_j = a_M$. Entonces

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{a_i}{a_M}\right)^p}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{j \in \mathcal{I}} m_j}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

por lo que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} a_M \left(\frac{\sum m_i \left(\frac{a_i}{a_M}\right)^p}{\sum m_i} \right)^{\frac{1}{p}} = a_M.$$

Es decir, si $p \rightarrow +\infty$, tendremos el máximo de los a_i .

En el caso en que $p \rightarrow -\infty$ un razonamiento similar nos lleva a que

$$\lim_{p \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n m_i a_i^p}{\sum_{i=1}^n m_i} \right)^{\frac{1}{p}} = a_m,$$

siendo a_m el mínimo de los a_i .

Nótese que en el caso de que los pesos sean todos iguales a uno, las medias ponderadas se reducen a las definiciones usuales de medias. Al igual que para éstas, existe una relación de desigualdad entre ellas, de manera que si $r < s$, la media ponderada de orden r es menor o igual que la de orden s . Para ver esta relación, supondremos, sin pérdida de generalidad, que la suma de los pesos es igual a 1. Así, tenemos el siguiente resultado, que podemos encontrar en [4].

Teorema 9 Sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ sucesiones de números reales positivos, donde se cumple que $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$, entonces, para $r < s$ se tiene que

$$M_r^m(\mathbf{a}) \leq M_s^m(\mathbf{a}) \quad (4.2)$$

es decir

$$(m_1 a_1^r + m_2 a_2^r + \dots + m_n a_n^r)^{\frac{1}{r}} \leq (m_1 a_1^s + m_2 a_2^s + \dots + m_n a_n^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Demostración 9 La demostración se basa en la conocida desigualdad de Jensen para funciones convexas. Si $f(x)$ es una función convexa en un intervalo $[a, b]$ y

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b], \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1,$$

entonces

$$f(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n) \leq m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \dots + m_n f(x_n). \quad (4.3)$$

Así, la función, $f(x) = x^\alpha$ es convexa, cuando $x > 0$, si $\alpha > 1$ o $\alpha < 0$ y será concava si $0 < \alpha < 1$.

Para ver el resultado, primero veremos que se cumple la inecuación cuando $r < s$ donde tanto s como r son diferentes de 0. Así, tenemos que estudiar varios casos:

(a) $0 < r < s$.

(b) $r < 0 < s$.

(c) $r < s < 0$.

Caso (a):

Tenemos que $\frac{s}{r} > 1$, por lo que $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ es convexa, y aplicando (4.3) resulta

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)^{\frac{s}{r}} \leq m_1x_1^{\frac{s}{r}} + m_2x_2^{\frac{s}{r}} + \cdots + m_nx_n^{\frac{s}{r}}.$$

Sea $x_i = a_i^r$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{s}{r}} \leq m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s,$$

de donde se sigue

$$(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{1}{r}} \leq (m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Es decir, en este caso se cumple el resultado del teorema.

Caso (b):

Puesto que $\frac{s}{r} < 0$, la función $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ es convexa y, siguiendo el mismo razonamiento que en caso (a), llegamos a probar la desigualdad..

Caso (c):

Tenemos que $0 < \frac{s}{r} < 1$, así que $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ es concava. Por tanto,

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)^{\frac{r}{s}} \geq m_1x_1^{\frac{r}{s}} + m_2x_2^{\frac{r}{s}} + \cdots + m_nx_n^{\frac{r}{s}}.$$

Sea $x_i = a_i^r$, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces resulta

$$(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{s}{r}} \geq m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s,$$

y como $r < s < 0$ obtenemos

$$(m_1a_1^r + m_2a_2^r + \cdots + m_na_n^r)^{\frac{1}{r}} \leq (m_1a_1^s + m_2a_2^s + \cdots + m_na_n^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Es decir, la desigualdad también se cumple el caso (c).

En el caso en que r o s sean 0, usando un argumento de continuidad, se ve que el resultado sigue siendo cierto. ■

El Teorema 9 nos da una desigualdad que no es estricta, por lo que es posible que dos medias de orden diferente sean iguales. Esto es cierto solo en el caso en que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Este hecho es importante y lo usaremos para encontrar las soluciones triangulares.

4.2 Soluciones triangulares

En primer lugar, vamos a ver cómo relacionar las medias ponderadas con las configuraciones centrales. Para ello, notamos que si tomamos como \mathbf{a} las distancias mutuas entre cada dos masas, $r_{j;k}$, y como pesos el producto de las masas, $m_j m_k$, R , que nos da el elipsoide de masas y que está definido en (1.7), será un múltiplo de la media cuadrática M_2 , ya que, por (1.10)

$$R = \sqrt{\frac{\sum_{j < k} m_j m_k r_{j;k}^2}{M}} = AM_2(\mathbf{a}),$$

donde

$$A = \sqrt{\frac{\sum_{j < k} m_j m_k}{M}}.$$

Por otra parte, la inversa de la función potencial, U^{-1} , va a ser un múltiplo de la media armónica, pues

$$U^{-1} = \frac{1}{\sum_{j < k} m_j m_k r_{j;k}^{-1}} = BM_{-1}(\mathbf{a}),$$

donde

$$B = \frac{1}{\sum_{j < k} m_j m_k}.$$

Puesto que las configuraciones centrales son puntos críticos de la función RU y ésta es un múltiplo escalar de $M_2(\mathbf{a})/M_{-1}(\mathbf{a})$, el único punto crítico se da cuando todos los elementos de \mathbf{a} son iguales, es decir, cuando las distancias mutuas son iguales. Para el caso de tres masas, éstas estarán situadas sobre los vértices de un triángulo equilátero y, para el caso de cuatro masas, sobre los vértices de un tetraedro. Con mayor número de masas no puede existir tal configuración, pues no podría darse en \mathbb{R}^3 .

La demostración de estos resultados se conoce desde hace mucho pero, como hemos visto en el capítulo 2, suelen ser laboriosas, pero usando medias ponderadas el resultado es inmediato. Un hecho sorprendente es que el triángulo equilátero, la única configuración central que no es colineal para el caso tres cuerpos, existe sin importar los valores de las masas, incluso en escenarios extremos, donde una masa podría ser una roca, mientras que las otras dos podrían ser, por ejemplo, un planeta y el sol. Este caso sucede en la realidad, como comentamos en el capítulo 2, para los asteroides griegos y troyanos.

4.3 Configuraciones centrales colineales

El otro tipo de configuraciones centrales que hemos considerado son las colineales, cuando todos los cuerpos se encuentran sobre una misma recta. En el capítulo 2 se vio que, para el caso de tres cuerpos, hay tres soluciones colineales,

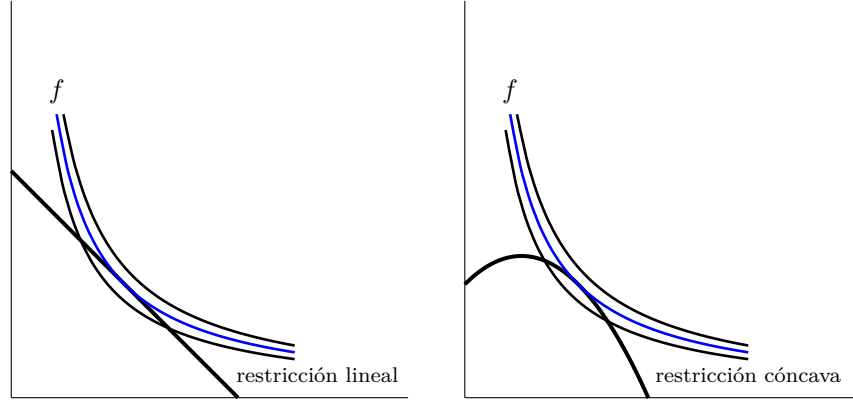


Figura 4.1: Puntos críticos de una función convexa con restricciones lineales o cóncavas.

tantas como ordenaciones de las tres masas. La prueba se basa en reducir el problema a encontrar la única raíz real de un polinomio de quinto grado. Para el caso general de n masas, tratado en el capítulo 3, la demostración aplica el principio de inducción para concluir que, también en este caso, hay tantas configuraciones centrales colineales como ordenaciones de las masas (salvo una rotación de 180°). En ambos casos el análisis no es sencillo, en particular la demostración dada por Moulton para el caso general.

Vamos a ver cómo dar una prueba elemental de estos resultados usando las medias ponderadas. Para ello, en primer lugar, nos centraremos en el problema de encontrar los puntos críticos de una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sujeta a una restricción lineal. Par ejemplificar la situación, supongamos que f es una función de dos variables cuyas curvas de nivel son convexas en sentido estricto (ninguna de ellas es una recta). El único punto crítico de f lo encontramos para la curva de nivel que es tangente a la restricción lineal. Las curvas de nivel en un entorno de la que es tangente o bien no cortan a la recta o bien la cortan dos veces (ver Figura 4.3). Esto es así, en general, para una función de n variables cuyos conjuntos de nivel sean convexas. La misma propiedad se cumple, si la restricción en lugar de ser lineal es cóncava, como en la Figura 4.3. Esta observación nos va a permitir encontrar nuevas configuraciones centrales.

Como vimos en la sección anterior, las únicas configuraciones centrales que resultan de $M_2(\mathbf{a})/M_{-1}(\mathbf{a})$ son las configuraciones equiláteras, cuando las distancias mutuas son iguales. Por tanto, el resto de configuraciones centrales tienen que provenir de los puntos críticos de $M_2(\mathbf{a})/M_{-1}(\mathbf{a})$ sujetos a una serie de restricciones sobre las distancias entre las masas. Por ejemplo, en el caso de las configuraciones centrales colineales de tres cuerpos, supongamos que m_2 es la masa que se encuentra entre medio de las otras dos y que

$$r_{1;2} = d_1, \quad r_{2;3} = d_2.$$

Al estar los cuerpos alineados, se tiene que $r_{1;3} = d_1 + d_2$, por lo que se cumple que

$$r_{1;2} + r_{2;3} - r_{1;3} = 0.$$

Entonces, encontrar las configuraciones colineales para n cuerpos es equivalente a encontrar los puntos críticos de $M_2(\mathbf{a})/M_{-1}(\mathbf{a})$ sujetos a las restricciones lineales

$$r_{j;k} + r_{k;l} - r_{j;l} = 0, \quad j < k < l,$$

que son las necesarias para especificar que los n cuerpos están sobre una recta. Además, la elección de las restricciones especifica un orden determinado de las masas sobre dicha recta. Podemos fijar el tamaño de la configuración, haciendo $R = 1$, por lo que, además de las restricciones lineales, tenemos otra restricción, correspondiente a un conjunto de nivel cóncavo. Ahora nuestro problema se reduce a encontrar los puntos críticos de $1/M_{-1}(\mathbf{a})$ bajo el conjunto de restricciones anteriores. Ahora bien, las restricciones o bien son lineales o cóncavas, mientras que los conjuntos de nivel de $1/M_{-1}(\mathbf{a})$ son convexos. Por el argumento que aparece en la Figura 4.3, solo hay una configuración central colineal para cada ordenación de las n masas sobre la recta.

Conclusiones

Esta memoria me ha servido para tratar uno de los temas que más me interesan, la Mecánica Celeste, siendo además uno de los problema que va a ser más importante en este siglo que vivimos.

También para reforzar mis conocimientos en análisis, además de observar in situ ideas citadas a lo largo de la carrera, a la hora de simplificar un problema al máximo posible y buscar diferentes formas de resolución del mismo.

Por último la búsqueda de la demostración de teoremas, no solo usando el principio de inducción, sino introduciendo unas técnicas más modernas e ingeniosas.

Referencias

- [1] A. Albouy y V. Kaloshin, Finiteness of central configurations of five bodies in the plane, *Annals of Mathematics*, **176**, 1–54, 2012.
- [2] F. Alfaro y E. Pérez-Chavela, Families of continua of central configurations in charged problems, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*, **9**, 463–475, 2002.
- [3] H. Cabral y F. Diacu, *Classical and Celestial Mechanics. The Recife Lectures*, Princeton University Press, New Jersey, 2002.
- [4] Z. Cvetkovski, *Inequalities*, Springer, Berlín, 2012.
- [5] L. Euler, De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, **11**, 144–151, 1767.
- [6] M. Hampton y R. Moeckel, Finiteness of relative equilibria of the four-body problem, *Inventiones Mathematicae*, **163**, 289–312, 2006.
- [7] G. H. Hardy, J.E. Littlewood y G. Pólya, *Inequalities*, 2^a ed. Cambridge University Press, New York, 1988.
- [8] R. Moeckel, On central configurations, *Mathematische Zeitschrift*, **205**, 499–517, 1990.
- [9] F. R. Moulton, The straight line solutions in the problem of N bodies, *Annal of Math. Second Series*, **12**, 1–17, 1910.
- [10] F. R. Moulton, *An Introduction to Celestial Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- [11] G. E. Roberts, A continuum of relative equilibria in the five body problem, *Physica D*, **127**, 141–145, 1999.
- [12] D. G. Saari, *Central Configurations- A Problem for the Twenty-first Century*, Insitute for Mathematical Behavioral Sciences, University of California, Irvine, CA 92697-5100.
- [13] S. Smale, Mathematical problems for the next century, in *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, ed. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, American Math. Soc., 271–294, 2000.

- [14] A. Wintner, *The Analytic Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, 1941.